1

解答例のページへ

正の整数 n に対し, n の正の約数の個数を $d(n)$ とする。たとえば, 6 の正の約数は 1, 2, 3, 6 の 4 個なので, $d(6)=4$ である。また, $f(n)=\dfrac{d(n)}{\sqrt{n}}$ とする。

(1)　$f(2025)$ を求めよ。

(2)　素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ。

(3)　$f(n)$ の最大値と, そのときの n を求めよ。

$\boxed{2}$

解答例のページへ

座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある。また，直線 $x=2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつような P の y 座標の範囲を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつとき，その 2 つの共有点を通る直線を l とする。l に関して P と対称な位置にある点を Q とする。ただし，P が l 上にあるときは $\mathrm{Q}=\mathrm{P}$ とする。P の y 座標が(1)で求めた範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ。

3

解答例のページへ

等式 $6\int_0^2 |x^2-a|dx = a^2-2a+k$ が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ。

4

解答例のページへ

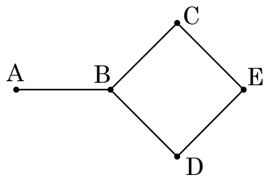
原点を O とする座標空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 3,\ -5)$，$\mathrm{B}(5,\ -2,\ 10)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}$，$s\geqq 0$，$\dfrac{1}{5}\leqq t\leqq\dfrac{3}{5}$ で定まる点 P が存在する範囲を D とする。D に含まれる半径$10\sqrt{2}$の円のうち，その中心と原点との距離が最小となるものを C とする。円 C の中心の座標を求めよ。

5

解答例のページへ

5 点 A, B, C, D, E が右図のように線分でむすばれている。

点 P_1，P_2，P_3，…を次のように定めていく。P_1 を A とする。正の整数 n に対して，P_n を端点とする線分をひとつ無作為にえらび，その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする。



(1)　P_n が A または B である確率 p_n を求めよ。

(2)　P_n が A または B であるとき，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ のいずれに対しても $P_k=\mathrm{E}$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$2025=3^4\cdot5^2$ から，$d(2025)=(4+1)\cdot(2+1)=15$ となり，

$$f(2025)=\frac{d(2025)}{\sqrt{2025}}=\frac{15}{3^2\cdot5}=\frac{1}{3}$$

(2)　p が素数, k が正の整数のとき $d(p^k)=k+1$ から，$f(p^k)\leqq f(p^{k+1})$ に対して,

$$\frac{k+1}{\sqrt{p^k}}\leqq\frac{k+2}{\sqrt{p^{k+1}}},\ \ k+1\leqq\frac{k+2}{\sqrt{p}}$$

すると，$\sqrt{p}\leqq\dfrac{k+2}{k+1}$ から，$p\leqq\left(\dfrac{k+2}{k+1}\right)^2=\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^2\cdots\cdots(*)$ となり，

・$k=1$ のとき　$(*)$から $p\leqq\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$ となり，$p=2$ である。

・$k\geqq2$ のとき　$\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)^2\leqq\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$ となり, $(*)$を満たす p はない。

したがって，$f(p^k)\leqq f(p^{k+1})$ を満たすものは，$(p,\ k)=(2,\ 1)$ だけである。

(3)　$n\geqq2$ のとき，p_1，p_2，…，p_m ($p_1<p_2<\cdots<p_m$) を素数，k_1，k_2，…，k_m を正の整数として n を素因数分解したとき，$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}$ となったとすると，

$$f(n)=\frac{(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)}{\sqrt{p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}}}=\frac{k_1+1}{\sqrt{p_1^{k_1}}}\cdot\frac{k_2+1}{\sqrt{p_2^{k_2}}}\cdots\frac{k_m+1}{\sqrt{p_m^{k_m}}}$$
$$=f(p_1^{k_1})\cdot f(p_2^{k_2})\cdots f(p_m^{k_m})$$

さて, (2)の結果から,

・$p=2$ のとき　$f(2^1)\leqq f(2^2)$ かつ $f(2^2)>f(2^3)>f(2^4)>\cdots$

ここで，$f(2^1)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$f(2^2)=\dfrac{3}{\sqrt{4}}=\dfrac{3}{2}$ から，

$$1<f(2^1)<f(2^2)>f(2^3)>f(2^4)>\cdots$$

・$p\geqq3$ のとき　$f(p^1)>f(p^2)>f(p^3)>f(p^4)>\cdots$

さらに，$f(3^1)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$，$p\geqq5$ のとき $f(p^1)=\dfrac{2}{\sqrt{p}}<1$ となるので，$n\geqq2$ のとき $f(n)$ の最大値は $f(2^2)\cdot f(3^1)$，すなわち $f(12)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ である。

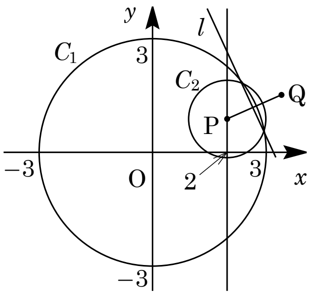
そして，$f(1)=\dfrac{1}{\sqrt{1}}=1$ なので，$f(n)$ は $n=12$ のとき最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

［コメント］

例年通り, 第 1 問は整数問題です。(2)が(3)の秀逸な誘導になっています。

2

問題のページへ



(1)　$C_1 : x^2+y^2=9$ ……①，また点 P の座標を $(2,\ t)$ とおくと，$C_2 : (x-2)^2+(y-t)^2=1$ ……②である。

ここで，C_1 と C_2 が共有点を 2 つもつ条件は，中心間距離が $\sqrt{4+t^2}$ より，$3-1<\sqrt{4+t^2}<3+1$ となり，

$$4<4+t^2<16$$

$4<4+t^2$ から $t\neq 0$，$4+t^2<16$ から $t^2-12<0$ すなわち $-2\sqrt{3}<t<2\sqrt{3}$ なので，P の y 座標 t の範囲は，

$$-2\sqrt{3}<t<0\,,\ \ 0<t<2\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　③のとき，2 つの共有点を通る直線 l は，①－②から，

$$4x-4+2ty-t^2=8\,,\ \ 4x+2ty=t^2+12\ \cdots\cdots\cdots④$$

l に関して P と対称な位置にある点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと，l の法線ベクトルの成分が $(4,\ 2t)=2(2,\ t)$ から，k を実数として $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k(2,\ t)$ となり，

$$X-2=2k\,,\ \ Y-t=tk$$

すると，$t(X-2)-2(Y-t)=0$ から，$tX-2Y=0$ ………⑤

また，線分 PQ の中点 $\left(\dfrac{2+X}{2},\ \dfrac{t+Y}{2}\right)$ が l 上にあることから，④より，

$$4\cdot\frac{2+X}{2}+2t\cdot\frac{t+Y}{2}=t^2+12\,,\ \ 2(2+X)+t(t+Y)=t^2+12$$

まとめると，$2X+tY=8$ ……⑥となり，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ の軌跡は，⑤⑥を連立して，

・$X=0$ のとき　⑤より $Y=0$ となるが，⑥に代入すると成立しない。

・$X\neq 0$ のとき　⑤より $t=\dfrac{2Y}{X}$ となり，⑥に代入すると $2X+\dfrac{2Y}{X}\cdot Y=8$ から，

$$X^2+Y^2=4X\,,\ \ (X-2)^2+Y^2=4\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

さて，⑤から $Y=\dfrac{t}{2}X$ となり，③から $-\sqrt{3}<\dfrac{t}{2}<0$，$0<\dfrac{t}{2}<\sqrt{3}$ である。そして，⑦と $Y=\pm\sqrt{3}X$ との交点は，$X^2+3X^2=4X\ (X\neq 0)$ から，

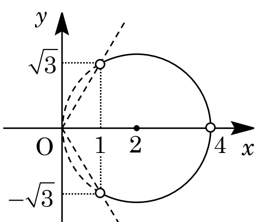
$$X=1\,,\ \ Y=\pm\sqrt{3}$$

したがって，点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ の軌跡は，

円弧：$(x-2)^2+y^2=4$

ただし $-\sqrt{3}x<y<0$，$0<y<\sqrt{3}x$ を満たす部分である。

図示すると，右図の実線部（白丸は除く）である。



［コメント］

軌跡の標準的な問題です。軌跡の限界のチェックがやや面倒ですが。

3

問題のページへ

等式 $6\int_0^2 |x^2-a|dx = a^2-2a+k$ に対し，$I(a)=6\int_0^2 |x^2-a|dx$ とおくと，

$$I(a)-a^2+2a=k\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$a\leqq 0$ のとき　$I(a)=6\int_0^2 (x^2-a)dx=\left[2x^3-6ax\right]_0^2=16-12a$

(ii)　$0<\sqrt{a}<2\ (0<a<4)$ のとき　$I(a)=-6\int_0^{\sqrt{a}}(x^2-a)dx+6\int_{\sqrt{a}}^2(x^2-a)dx$

$$I(a)=\left[-2x^3+6ax\right]_0^{\sqrt{a}}+\left[2x^3-6ax\right]_{\sqrt{a}}^2$$
$$=-2a\sqrt{a}+6a\sqrt{a}+2(8-a\sqrt{a})-6a(2-\sqrt{a})=8a\sqrt{a}-12a+16$$

(iii)　$\sqrt{a}\geqq 2\ (a\geqq 4)$ のとき　$I(a)=-6\int_0^2(x^2-a)dx=-16+12a$

さて，$f(a)=I(a)-a^2+2a$ とおくと，$(*)$は $f(a)=k$ となり，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$$f(a)=16-12a-a^2+2a$$
$$=-a^2-10a+16=-(a+5)^2+41$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになる。

a	$\cdots$	-5	$\cdots$	0
$f(a)$	$\nearrow$	41	$\searrow$	16

(ii)　$0<a<4$ のとき

$$f(a)=8a\sqrt{a}-12a+16-a^2+2a=-a^2+8a\sqrt{a}-10a+16$$

ここで，$t=\sqrt{a}$ とおくと $0<t<2$ となり，さらに $g(t)=f(a)$ とおくと，

$$g(t)=-t^4+8t^3-10t^2+16$$
$$g'(t)=-4t^3+24t^2-20t$$
$$=-4t(t-1)(t-5)$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	16	$\searrow$	13	$\nearrow$	24

(iii)　$a\geqq 4$ のとき

$$f(a)=-16+12a-a^2+2a$$
$$=-a^2+14a-16=-(a-7)^2+33$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになる。

a	4	$\cdots$	7	$\cdots$
$f(a)$	24	$\nearrow$	33	$\searrow$

(i)～(iii)より，$(*)$すなわち $f(a)=k$ が成り立つ a が 4 つ存在する k の範囲は，

$$13<k<33$$

［コメント］

定積分の計算問題ですが，時間はかなり費やします。(ii)の場合は，$f(a)$ のグラフが範囲外になりますので，増減表で説明をしています。

4

問題のページへ

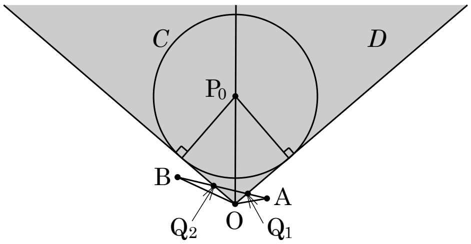
点 $\mathrm{A}(0,\ 3,\ -5)$，$\mathrm{B}(5,\ -2,\ 10)$ に対して，点 Q_1，Q_2 を，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{4}{5}(0,\ 3,\ -5)+\frac{1}{5}(5,\ -2,\ 10)=(1,\ 2,\ -2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{5}(0,\ 3,\ -5)+\frac{3}{5}(5,\ -2,\ 10)=(3,\ 0,\ 4)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\left(\frac{1}{5}\leqq t\leqq\frac{3}{5}\right)$ とおくと，点 Q は線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ 上にある。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}=s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$s\geqq 0$ から，点 P は右図の領域 D に存在する。



そして，D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち，その中心と O との距離が最小となるものを C とし，その中心を P_0，$\theta=\angle\mathrm{Q}_1\mathrm{O}\mathrm{Q}_2$ とおくと，半直線 OP_0 は $\angle\mathrm{Q}_1\mathrm{O}\mathrm{Q}_2$ の二等分線である。

まず，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}\right|=\sqrt{1+4+4}=3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2}\right|=\sqrt{9+0+16}=5$ から，k を正の実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}}{3}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2}}{5}\right)=\frac{k}{3}(1,\ 2,\ -2)+\frac{k}{5}(3,\ 0,\ 4)=\frac{2k}{15}(7,\ 5,\ 1)$$

これより，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right|=\frac{2k}{15}\sqrt{49+25+1}=\frac{2k}{15}\cdot 5\sqrt{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}k$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_2}=3+0-8=-5$ から，$\cos\theta=\frac{-5}{3\cdot 5}=-\frac{1}{3}$ となり，

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{………②}$$

そこで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}\right|\sin\frac{\theta}{2}=10\sqrt{2}$ に①②を適用すると，$\frac{2}{3}\sqrt{3}k\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=10\sqrt{2}$ から，

$$k=10\cdot\frac{3}{2}=15$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\frac{2\cdot 15}{15}(7,\ 5,\ 1)=(14,\ 10,\ 2)$ から，$\mathrm{P}_0(14,\ 10,\ 2)$ である。

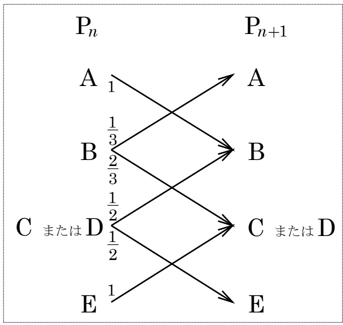
［コメント］

空間ベクトルと領域の融合問題です。いろいろな基本事項を組み合わせることが必要ですが，数値がうまく選ばれているため，計算は容易でホッとします。

5

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}_n=\mathrm{A}$，$\mathrm{P}_n=\mathrm{B}$，$\mathrm{P}_n=\mathrm{C}$またはD，$\mathrm{P}_n=\mathrm{E}$となる確率を，それぞれa_n，b_n，c_n，e_nとおく。すると，状態の推移図は右のようになり，



$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n+e_n\cdots\cdots\cdots③,\quad e_{n+1}=\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots④$$

なお，$a_1=1$，$b_1=c_1=e_1=0$，$a_2=0$，$b_2=1$，$c_2=e_2=0$である。

まず，①＋③より，$a_{n+1}+c_{n+1}=b_n+e_n$

ここで，$a_n+b_n+c_n+e_n=1$から，

$$a_{n+1}+c_{n+1}=1-(a_n+c_n)$$

すると，$a_{n+1}+c_{n+1}-\frac{1}{2}=-\left(a_n+c_n-\frac{1}{2}\right)$となり，

$$a_n+c_n-\frac{1}{2}=-\left(a_1+c_1-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1}=\left(1+0-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

したがって，$a_n+c_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n-1}\cdots\cdots\cdots⑤$

(i)　$n=2k\ (k\geqq 1)$のとき　⑤より$a_{2k}+c_{2k}=0$

②から$b_{2k+1}=a_{2k}+\frac{1}{2}c_{2k}=a_{2k}-\frac{1}{2}a_{2k}=\frac{1}{2}a_{2k}$

①に代入して，$a_{2k+2}=\frac{1}{3}b_{2k+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a_{2k}=\frac{1}{6}a_{2k}$となり，

$$a_{2k}=a_2\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=0$$

(ii)　$n=2k-1\ (k\geqq 1)$のとき　⑤より$a_{2k-1}+c_{2k-1}=1$

②から$b_{2k}=a_{2k-1}+\frac{1}{2}c_{2k-1}=a_{2k-1}+\frac{1}{2}(1-a_{2k-1})=\frac{1}{2}a_{2k-1}+\frac{1}{2}$

①に代入して，$a_{2k+1}=\frac{1}{3}b_{2k}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a_{2k-1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}a_{2k-1}+\frac{1}{6}$となり，

$$a_{2k+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(a_{2k-1}-\frac{1}{5}\right)$$

すると，$a_{2k-1}-\frac{1}{5}=\left(a_1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$となり，

$$a_{2k-1}=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$$

(i)(ii)より，①を利用すると，$b_n=3a_{n+1}$から，

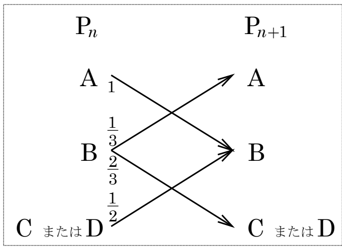
$$b_{2k}=3a_{2k+1}=\frac{3}{5}+\frac{12}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1},\quad b_{2k-1}=3a_{2k}=0$$

したがって，P_nが A または B である確率p_nは，$p_n=a_n+b_n$より，

・nが偶数のとき　$p_n=a_{2k}+b_{2k}=0+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}$

・n が奇数のとき　$p_n = a_{2k-1} + b_{2k-1} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k-1} + 0 = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

(2) 「$\mathrm{P}_n = \mathrm{A}$ かつ $\mathrm{P}_k \neq \mathrm{E}$」,「$\mathrm{P}_n = \mathrm{B}$ かつ $\mathrm{P}_k \neq \mathrm{E}$」,「$(\mathrm{P}_n = \mathrm{C}$ または $\mathrm{D})$ かつ $\mathrm{P}_k \neq \mathrm{E}$」となる確率を，それぞれ α_n，β_n，γ_n とおく。すると，状態の推移図は右のようになり，



$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{3}\beta_n \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$\beta_{n+1} = \alpha_n + \frac{1}{2}\gamma_n \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{2}{3}\beta_n \cdots\cdots\cdots ⑦$$

なお，$\alpha_1 = 1$，$\beta_1 = \gamma_1 = 0$，$\alpha_2 = 0$，$\beta_2 = 1$，$\gamma_2 = 0$ である。

まず，⑥から $\beta_{n+2} = \alpha_{n+1} + \dfrac{1}{2}\gamma_{n+1}$ となり，⑤⑦を代入すると，

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{3}\beta_n + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\beta_n = \frac{2}{3}\beta_n \cdots\cdots\cdots ⑧$$

(i)　$n = 2k\ (k \geqq 1)$ のとき　⑧より $\beta_{2k+2} = \dfrac{2}{3}\beta_{2k}$ となり，

$$\beta_{2k} = \beta_2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

(ii)　$n = 2k-1\ (k \geqq 1)$ のとき　⑧より $\beta_{2k+1} = \dfrac{2}{3}\beta_{2k-1}$

$$\beta_{2k-1} = \beta_1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 0$$

(i)(ii)より，①を利用すると，$\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{3}\beta_n$ から，

$$\alpha_{2k} = \frac{1}{3}\beta_{2k-1} = 0,\quad k \geqq 2 \text{ のとき } \alpha_{2k-1} = \frac{1}{3}\beta_{2k-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2},\ \text{ただし } \alpha_1 = 1$$

したがって，P_n が (A または B) かつ $\mathrm{P}_k \neq \mathrm{E}$ である確率を $p_n{}'$ とすると，$p_n{}' = \alpha_n + \beta_n$ となり，求める条件付き確率 q_n は $q_n = \dfrac{p_n{}'}{p_n}$ から，

・n が偶数のとき　$p_n{}' = \alpha_{2k} + \beta_{2k} = 0 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}$

$$q_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}} = \frac{5\cdot 2^{n-2}}{3\cdot 6^{\frac{n}{2}-1} + 2}$$

・n が 3 以上の奇数のとき　$p_n{}' = \alpha_{2k-1} + \beta_{2k-1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-2} + 0 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}$

$$q_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{5\cdot 2^{n-1}}{2\cdot 6^{\frac{n-1}{2}} + 8}$$

・$n=1$のとき　$p_n{}'=\alpha_1+\beta_1=1$，$p_n=a_1+b_1=1$から，$q_n=\dfrac{1}{1}=1$

［コメント］

確率と漸化式についてのかなり難しめの問題です。連立漸化式を解く方法で記述しましたが，最初にnを偶奇に分けた方がクリアーだったようです。