1　解答解説のページへ

正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。

正の整数の組 $(a,\ b)$ は, 条件

$$0 < a - r(a) < \frac{4}{3}r(b) \qquad 0 < b - r(b) < \frac{4}{3}r(ab)$$

をみたすとする。

(1)　$a - r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2)　a と b を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=5,\quad a_{n+1}=2a_n+3^n\quad (n=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　$b_n=a_n-3^n$とおく。b_{n+1}をb_nで表せ。

(2)　a_nを求めよ。

(3)　$a_n<10^{10}$をみたす最大の正の整数nを求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$としてよい。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

$\triangle$ABC の 3 辺 BC, CA, AB を$t:1-t$の比に内分する点をそれぞれA_1, B_1, C_1とおき, $\triangle A_1B_1C_1$の 3 辺B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1を$t:1-t$の比に内分する点をそれぞれA_2, B_2, C_2とおく。ただし, $0<t<1$とする。

(1) $\triangle A_2B_2C_2$の辺B_2C_2が$\triangle$ABC のいずれかの辺と平行となるtの値を求めよ。

(2) (1)のとき, $\triangle A_2B_2C_2$は$\triangle$ABC に相似であることを示し, その相似比を求めよ。

4

解答解説のページへ

放物線$y=x^2$上の点$\mathrm{A}(a,\ a^2)$における接線lと，点$\mathrm{B}(b,\ b^2)$における接線mとの交点をCとおく。ただし，$a<b$とする。

(1) 2直線l, mと放物線$y=x^2$とで囲まれる部分の面積Sをaとbで表せ。

(2) 点Cが放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$の上を動くときの面積Sの最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

H 大学には 4 つの食堂があり，A 君と B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている。最初の日，二人は別々の食堂で食事をしたとして，以下の確率を求めよ。

(1)　n 日後に，はじめて二人が食堂で出会う確率。ただし $n \geqq 1$ とする。

(2)　n 日後に，二人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。ただし $n \geqq 2$ とする。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

$0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$ ………① 　　$0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ ………②とする。

(1)　$0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$0\leqq \dfrac{4}{3}r(b)\leqq \dfrac{28}{3}<10$

①より，$0<a-r(a)<10$

また，$a-r(a)$ が 8 の倍数となることを考えあわせて，$a-r(a)=8$ ………③

すると，①より $8<\dfrac{4}{3}r(b)$ となり，$6<r(b)$

$0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$r(b)=7$

(2)　(1)と同様にして，

②より，$b-r(b)=8$ ………④，$r(ab)=7$ ………⑤

④より，$b=r(b)+8=15$

⑤より，$r(15a)=7$

よって，$15a=8k+7$（k は自然数）

$15(a-1)=8(k-1)$

15 と 8 は互いに素より，$a-1$ は 8 の倍数

l を整数として，$a-1=8l$，$a=8l+1$

すなわち，$r(a)=1$

③より，$a=r(a)+8=9$

［解 説］

第 1 問は昨年と同じく整数問題です。不等式の処理が難しそうですが, (1)(2)とも誘導が丁寧についているため, 見かけほどではありません。なお, (2)の後半の式変形は, 不定方程式の解を求める常套手段の一つです。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3^n$ より，$a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$

よって，$b_{n+1}=2b_n$

(2)　(1)より，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=(5-3^1)\cdot 2^{n-1}=2^n$

$a_n=b_n+3^n=2^n+3^n$

(3)　(2)より，$a_n=2^n+3^n<10^{10}$ から，$3^n\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right\}<10^{10}$

両辺に対数をとって，$n\log_{10}3+\log_{10}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right\}<10$ ………①

ここで $n\geqq 1$ より，$1<\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\leqq\dfrac{5}{3}<2$

$$0<\log_{10}\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1\right\}<\log_{10}2\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$n\log_{10}3<10$ とすると，$n<\dfrac{10}{\log_{10}3}\fallingdotseq 20.96$

n は整数より，$n\leqq 20$

また，$n\log_{10}3+\log_{10}2<10$ とすると，$n<\dfrac{10-\log_{10}2}{\log_{10}3}\fallingdotseq 20.33$

n は整数より，$n\leqq 20$

よって②から，①をみたす整数 n の値の範囲は $n\leqq 20$

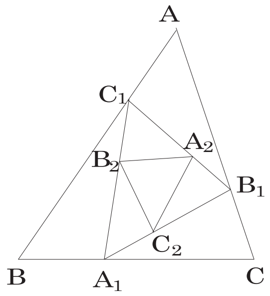
これより，$a_n<10^{10}$ をみたす最大整数は $n=20$ となる。

［解 説］

(2)の誘導として(1)が設定されていますが，ここは親切すぎるくらいです。有難迷惑と感じた受験生が多かったのではないでしょうか。また，(3)は対数を利用した概数計算ですが，n が大きくなると，$2^n\ll 3^n$ となるという感覚があれば，後はどのようにしてこの感覚を表現するかだけです。

3

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{AB_2}=(1-t)\overrightarrow{AC_1}+t\overrightarrow{AA_1}$$
$$=(1-t)t\vec{b}+t\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}$$
$$=2t(1-t)\vec{b}+t^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{AC_2}=(1-t)\overrightarrow{AA_1}+t\overrightarrow{AB_1}$$
$$=(1-t)\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}+t(1-t)\vec{c}$$
$$=(1-t)^2\vec{b}+2t(1-t)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AB_2}=(3t^2-4t+1)\vec{b}-(3t^2-2t)\vec{c}$$

(i)　$B_2C_2 /\!/ AC$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=0$，よって $t=\dfrac{1}{3}$

(ii)　$B_2C_2 /\!/ AB$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{b}$ の実数倍より $3t^2-2t=0$，よって $t=\dfrac{2}{3}$

(iii)　$B_2C_2 /\!/ BC$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{b}-\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=3t^2-2t$，
よって $t=\dfrac{1}{2}$

(2)　(1)と同様にして，

$$\overrightarrow{AA_2}=t\overrightarrow{AC_1}+(1-t)\overrightarrow{AB_1}=t^2\vec{b}+(1-t)^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{C_2A_2}=\overrightarrow{AA_2}-\overrightarrow{AC_2}=(2t-1)\vec{b}-(3t^2-4t+1)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AA_2}=(2t-3t^2)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$$

(i)　$t=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{C_2A_2}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，
$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ より，$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle BCA$ で，相似比は $1:3$

(ii)　$t=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{C_2A_2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，
$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ より，$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle CAB$ で，相似比は $1:3$

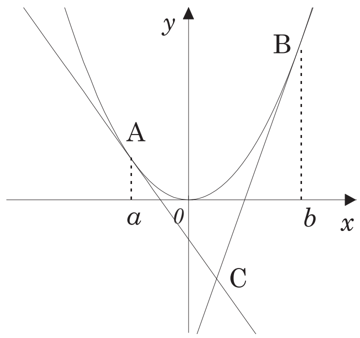
(iii)　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}=-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{C_2A_2}=-\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}$，
$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{4}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ より，$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$ で，相似比は $1:4$

［解 説］

よくある構図の頻出問題です。上のように 1 次独立なベクトルを設定するか，または頂点の位置ベクトルを設定して解いていけば，完答できる問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$l : y = m_1x + n_1$，$m : y = m_2x + n_2$ とおくと，

条件より，

$$x^2 - (m_1x + n_1) = (x - a)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$$x^2 - (m_2x + n_2) = (x - b)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

l と m の交点 C の x 座標は，

$$m_1x + n_1 = m_2x + n_2$$

①②を代入して，$x^2 - (x - a)^2 = x^2 - (x - b)^2$

よって，$x - a = -(x - b)$ より，$x = \dfrac{a+b}{2}$

$$S = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x - a)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x - b)^2 dx = \frac{1}{3}\Big[(x - a)^3\Big]_a^{\frac{a+b}{2}} + \frac{1}{3}\Big[(x - b)^3\Big]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}(b - a)^3$$

(2)　点 C の y 座標は，①より $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a+b}{2} - a\right)^2 = ab$ となり，$\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

条件より，点 C は放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 2$ 上にあるので，

$ab = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \dfrac{a+b}{2} - 2$，すなわち $8ab = (a + b)^2 - 4(a + b) - 16 \cdots\cdots\cdots ③$

ここで，$b - a = k\ \ (k > 0)$ とおき，$b = a + k$ として③に代入する。

$$8a(a + k) = (2a + k)^2 - 4(2a + k) - 16$$

$$4a^2 + 4(k + 2)a - (k^2 - 4k - 16) = 0$$

a が実数より，$D/4 = 4(k + 2)^2 + 4(k^2 - 4k - 16) \geqq 0$ から，$k^2 - 6 \geqq 0$

$k > 0$ なので，$k \geqq \sqrt{6}$

(1)から, S の最小値は $\dfrac{1}{12}\left(\sqrt{6}\right)^3$,すなわち $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ となる。

［解 説］

数学Ⅱの積分による面積計算が，放物線に原則的に限られたために，本問と全く同じ問題が，昨年から非常に多く出題されるようになりました。本年もセンター試験の追試で同じ問題が出ています。このようなことも考慮して, (1)では, 2 本の接線の交点の x 座標が 2 つの接点の x 座標の相加平均になることを一般的に示しました。また, (2)は対称式に着目する解法もありますが，上の解と計算量に大差はありません。

5

問題のページへ

(1) ある日, A と B が異なる食堂で食事をし, 翌日は同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 2=\frac{2}{9}$$

n 日後に, はじめて A と B が同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(1-\frac{2}{9}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

(2) ある日, A と B が同じ食堂で食事をし, 翌日も同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 3=\frac{1}{3}$$

以上まとめると, 右のようになる。

翌日＼前日	同じ食堂	異なる食堂
同じ食堂	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
異なる食堂	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$

n 日後に, A と B が同じ食堂で食事をするのが 2 回目であるのは,

(i)　$n=2$ のとき, その確率は, $\dfrac{2}{9}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$

(ii)　$n\geqq 3$ のとき, k 日後（$1\leqq k\leqq n-2$）に, はじめて同じ食堂で食事をすると,

$$\boxed{\text{最初}}\xrightarrow[\frac{7}{9}]{}\cdots\xrightarrow[\frac{7}{9}]{}\boxed{k-1\text{日後}}\xrightarrow[\frac{2}{9}]{}\boxed{k\text{日後}}\xrightarrow[\frac{2}{3}]{}\boxed{k+1\text{日後}}\xrightarrow[\frac{7}{9}]{}\cdots\xrightarrow[\frac{7}{9}]{}\boxed{n-1\text{日後}}\xrightarrow[\frac{2}{9}]{}\boxed{n\text{日後}}$$

その確率は, $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{n-2}\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{7}{9}\right)^{(n-1)-(k+1)}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{8}{243}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{n-3}$

また, $n-1$ 日後に, はじめて同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}$$

よって求める確率は,

$$\sum_{k=1}^{n-2}\frac{8}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3}+\frac{2}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}=\frac{8(n-2)}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3}+\frac{2}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}=\frac{8n-2}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3}$$

$n=2$ をあてはめると, $\dfrac{14}{243}\cdot\dfrac{9}{7}=\dfrac{2}{27}$ となり, (i)の場合を含む。

(i)(ii)より, n 日後に, A と B が同じ食堂で食事をするのが 2 回目である確率は,

$$\frac{8n-2}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3}\quad(n\geqq 2)$$

［解 説］

本年度は従来に比べて易しめですが, その中では本問が一番骨のある問題です。(2)の(ii)で $k=n-1$ の場合を特別に考えなくてはいけないことは, 一般的に考えておいて, 例外があるかどうかで判断します。このとき, 上の解のように状態の推移と推移確率を図にまとめておくと, わかりやすくなります。