1

解答解説のページへ

$p,\ q$ は素数で, $p<q$ とする。

(1)　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは, $p=2$, $q=3$ のときに限ることを示せ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

α，β を 0 でない複素数とし，

$$\alpha' = \frac{\alpha}{|\alpha|^2}\,,\ \ \beta' = \frac{\beta}{|\beta|^2}$$

とする。

(1) $|\alpha' - \beta'|$ を $|\alpha|$，$|\beta|$，$|\alpha - \beta|$ を用いて表せ。

(2) α，β が $|\alpha - \beta| = 1$，$|\alpha| = 2$ を満たしながら動くとき，$|\alpha' - \beta'|$ の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

三角形 ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=6$ である。辺 AC 上の点 D は $\mathrm{BD}\perp\mathrm{AC}$ を満たし，辺 AB 上の点 E は $\mathrm{CE}\perp\mathrm{AB}$ を満たす。CE と BD の交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 r を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる実数 $s,\ t$ を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

(1)　曲線 $y = x^3$ と直線 $y = 3x + a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲を動くとき, 3 つの交点を A, B, C とし, 点 $(a,\ 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値を求めよ。

5

解答解説のページへ

箱 A, 箱 B のそれぞれに赤玉が 1 個, 白玉が 3 個, 合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後, 箱 A に赤玉が 1 個, 白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より，$\dfrac{p+q}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(p+q)r=pq$ ………①

ここで，$p+q$ と pq が 2 以上の公約数 m をもつとすると，a，b を自然数として，$p+q=ma$，$pq=mb$ と表される。すると，この式をまとめて $p(ma-p)=mb$ より $p^2=m(ap-b)$，$q(ma-q)=mb$ より $q^2=m(aq-b)$ となり，p^2 と q^2 は 2 以上の公約数 m をもつ。これは，p，q が素数ということに反する。よって，$p+q$ と pq は互いに素である。

すると，①より r が pq の倍数となるので, k を整数として $r=kpq$ と表せる。

①に代入して $(p+q)k=1$ ………②

p，q は $p<q$ を満たす素数なので，$p+q\geqq 2+3=5$ となり，②を満たす整数 k は存在しない。

よって，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しない。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より，$\dfrac{q-p}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(q-p)r=pq$ ………③

(1)と同様にして，$q-p$ と pq は互いに素であるので，③より r が pq の倍数となり, l を整数として $r=lpq$ と表せる。

③に代入して $(q-p)l=1$ ………④

④より $q-p$ は 1 の約数となり, $p<q$ より $q-p=1$

これより, p, q の一方が偶数，他方が奇数となるが，偶数の素数は 2 しかないので，$p=2$，$q=3$ となる。このとき $r=6$ となり適する。

よって，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限る。

［解 説］

例年通り，第 1 問は整数問題です。96 年度と同様に，大小関係からとりうる値の範囲を絞り込んでいくことをまず考えました。ところがそれではうまく証明できなかったので, p, q が素数という条件をもとに考え直しました。

© 電送数学舎

$\boxed{2}$

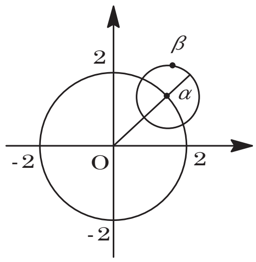
問題のページへ

(1)　$\alpha' = \dfrac{\alpha}{|\alpha|^2} = \dfrac{\alpha}{\alpha\overline{\alpha}} = \dfrac{1}{\overline{\alpha}}$，$\beta' = \dfrac{\beta}{|\beta|^2} = \dfrac{\beta}{\beta\overline{\beta}} = \dfrac{1}{\overline{\beta}}$ より，

$$|\alpha' - \beta'| = \left|\frac{1}{\overline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\beta}}\right| = \frac{|\overline{\beta} - \overline{\alpha}|}{|\overline{\alpha}\,\overline{\beta}|} = \frac{|\overline{\alpha} - \overline{\beta}|}{|\overline{\alpha}||\overline{\beta}|} = \frac{|\alpha - \beta|}{|\alpha||\beta|}$$

(2)　$|\alpha - \beta| = 1$，$|\alpha| = 2$ より，(1)から，

$$|\alpha' - \beta'| = \frac{1}{2|\beta|}$$



ここで，$|\alpha| = 2$ より点 α は原点を中心とする半径 2 の円周上にあり，$|\alpha - \beta| = 1$ より点 β は点 α を中心とする半径 1 の円周上にあるので，右図より，

$$1 = 2 - 1 \leqq |\beta| \leqq 2 + 1 = 3$$

よって，$|\beta| = 1$ のとき $|\alpha' - \beta'|$ は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとり，$|\beta| = 3$ のとき $|\alpha' - \beta'|$ は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

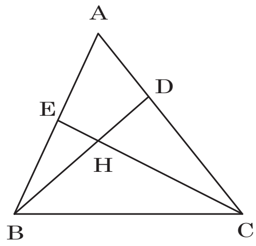
［解 説］

複素数と図形に関する基本問題です。結論があまりにもあっさりと求まってしまい，逆に不安を感じてしまいます。

© 電送数学舎

3

問題のページへ



(1)　余弦定理より，$\cos A=\dfrac{16+25-36}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{8}$

これより，$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\cos A=\dfrac{1}{2}$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}=\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので $r=\dfrac{1}{10}$ となる。

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4\cdot5\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{2}$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$，$(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ ………②

①②より，$\left((s-1)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$$\frac{5}{2}(s-1)+25t=0,\quad s+10t=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ ………④

①④より，$\left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(t-1)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$$16s+\frac{5}{2}(t-1)=0,\quad 32s+5t=5\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

③⑤より，$s=\dfrac{1}{7}$，$t=\dfrac{3}{35}$

［解 説］

三角形の垂心のベクトル表示を求めるという頻出題の一つです。(2)では(1)の結果を利用しようか，それとも無視しようかと迷ってしまいます。どちらにせよ，計算量はほとんど同じですので，後者で解を書きました。

© 電送数学舎

4

問題のページへ

(1)　$y=x^3$ ………①，$y=3x+a$ ………②

①②より，$x^3-3x=a$ ………③

①と②が異なる 3 点で交わる条件は，曲線 $y=x^3-3x$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点で交わる条件と同値である。

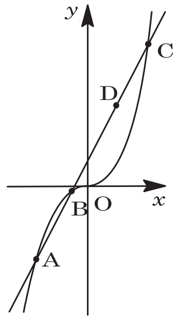
ここで，$f(x)=x^3-3x$ とおくと，

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表より，求める条件は $-2<a<2$

(2)　③の解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ （$\alpha<\beta<\gamma$）として，$\mathrm{A}(\alpha,\ 3\alpha+a)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 3\beta+a)$，$\mathrm{C}(\gamma,\ 3\gamma+a)$ とおく。



このとき，③を $x^3-3x-a=0$ と変形すると，

$$x^3-3x-a=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ \cdots\cdots\cdots ④$$

このとき，$\mathrm{DA}=\sqrt{(\alpha-a)^2+(3\alpha+a-4a)^2}$

$$=\sqrt{10(\alpha-a)^2}=\sqrt{10}\,|\alpha-a|$$

同様にして，$\mathrm{DB}=\sqrt{10}\,|\beta-a|$，$\mathrm{DC}=\sqrt{10}\,|\gamma-a|$

$$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}=10\sqrt{10}\,|\alpha-a||\beta-a||\gamma-a|$$
$$=10\sqrt{10}\,|(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)|$$
$$=10\sqrt{10}\,|a^3-3a-a|\ （④より）$$
$$=10\sqrt{10}\,|a^3-4a|$$

ここで，$g(a)=a^3-4a$ とおくと，$g'(a)=3a^2-4=(\sqrt{3}a+2)(\sqrt{3}a-2)$

右表より，$|g(a)|$ は $a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$ をとる。

a	-2	…	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	…	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	…	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

よって，$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値は $10\sqrt{10}\cdot\dfrac{16}{9}\sqrt{3}=\dfrac{160}{9}\sqrt{30}$ となる。

［解 説］

微分法の応用に関する問題です。本問のポイントは，強いて言えば，(2)で④式に注目することです。

© 電送数学舎

$\boxed{5}$

問題のページへ

箱 A に入っている赤玉の個数を a, 白玉の個数を b とすると, 次の場合がある。

$$(a,\ b)=(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2)$$

また, 題意の試行を n 回繰り返した後に, $(a,\ b)=(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2)$ となる確率をそれぞれ q_n, p_n, r_n とおく。

すると, $p_0=1$ で, $p_n+q_n+r_n=1$ ………①

次に, $n+1$ 回後に $(a,\ b)=(1,\ 3)$ となるのは, 次の 3 つの場合がある。

(i) n 回後に $(a,\ b)=(0,\ 4)$ のとき

A から白, B から赤をとって交換する場合で, その確率は $1\times\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ となる。

(ii) n 回後に $(a,\ b)=(1,\ 3)$ のとき

A から赤, B から赤をとって交換するか, または A から白, B から白をとって交換する場合で, その確率は $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{8}$ となる。

(iii) n 回後に $(a,\ b)=(2,\ 2)$ のとき

A から赤, B から白をとって交換する場合で, その確率は $\frac{2}{4}\times 1=\frac{1}{2}$ となる。

(i)(ii)(iii)より, $p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{5}{8}p_n+\frac{1}{2}r_n$ ………②

すると①②より, $p_{n+1}=\frac{5}{8}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n)=\frac{1}{8}p_n+\frac{1}{2}$

$$p_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$$

よって, $p_n-\frac{4}{7}=\left(p_0-\frac{4}{7}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^n=\frac{3}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n$ より, $p_n=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n$

［解 説］

参考書などでは, 数学 B の確率部分に載っている確率と漸化式の融合問題です。この分野は, 一橋大のように数学 B の確率が除外範囲となっている大学でも, よく出題されます。

© 電送数学舎