1

解答解説のページへ

(1)　次の不等式の表す領域 D を図示せよ。

$$|x| \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+3$$

(2)　点 A を $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　領域 D の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 から 4 までの番号を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す。これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の積が 3 の倍数である確率を a_n，4 の倍数である確率を b_n とおく。

(1)　a_n と b_n を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$b_n > a_n$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上の 3 点$\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\omega)$，$\mathrm{C}(\omega^2)$を原点 O のまわりに60°回転した点をそれぞれA'，B'，C'とする(ここに$\omega=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$)。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A'，B'，C'を表す複素数を求めよ。

(2)　三角形 ABC と$\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$の一方の三角形の各辺はもう一方の三角形の辺との交点によって三等分されていることを示せ。

4

解答解説のページへ

3 次関数$f(x)=x^3+px^2+qx$がある。$x=a$における曲線$y=f(x)$の接線が接点$\mathrm{P}(a,\ f(a))$以外の点 Q で$y=f(x)$のグラフと交わっているとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 Q のx座標bをaとpで表せ。

(2) $x=c$における$y=f(x)$の接線が点 P を通るような実数cのうち$c\neq a$なるものをaとpで表せ。

(3) $\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}$の値を求めよ。

1

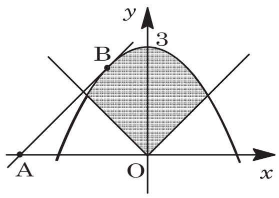
問題のページへ

(1)　$y=|x|$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ ……①を連立して，$y=-\dfrac{1}{2}y^2+3$，$y^2+2y-6=0$

$y\geqq 0$ より $y=-1+\sqrt{7}$ となり，このとき $x=\pm(-1+\sqrt{7})$

よって, 2 交点 $\left(\pm(-1+\sqrt{7}),\ -1+\sqrt{7}\right)$ となる。

これより，不等式 $|x|\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$ の表す領域 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線は，$y=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ………②

①②が接する条件は，$-\dfrac{1}{2}x^2+3=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$，$x^2+2mx+7m-6=0$ ………③

$$D/4=m^2-(7m-6)=0,\ m=1,\ 6$$

ここで，接点の x 座標は③より $x=-m$ となるので，$m=1$ である。

このとき，$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{5}{2}\right)$ となり，$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-1+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

さて，直線 AB と直線 $y=x$ は平行なので，点 P が $y=x$ 上にあるとき，△ABP の面積は最大となる。

直線 AB と直線 $y=x$ との距離は，$\dfrac{7}{2}\cos 45^\circ=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，△ABP の面積の最大値は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{4}=\dfrac{35}{8}$ である。

(3)　$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}=k$ とおくと，$y=k\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ……④となり，点 A を通り傾き k の直線を表す。すると，k のとる範囲は，④と領域 D が共有点をもつ条件より求まるので，(2)から $0\leqq k\leqq 1$ となる。

［解 説］

(2)が(3)の誘導となっており, (3)では計算の必要がありません。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　n 個の数の積が 3 の倍数である事象を A とすると,

$$a_n = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

次に, n 個の数の積が 2 の倍数である事象を C とすると,

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{2}{4}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

また, n 個の数の積が 4 の倍数である事象を B とすると, 積事象 $\overline{B}\cap C$ は, n 個の数の積が 2 の倍数であるが, 4 の倍数ではない事象を表し, この場合は 2 を 1 回抜き, それ以外は 1 または 3 を抜くときなので,

$$P(\overline{B}\cap C) = {}_n\mathrm{C}_1\,\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって, $b_n = P(B) = P(C) - P(\overline{B}\cap C) = 1 - \left(1 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2)　$b_n > a_n \iff 1 - \left(1 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n > 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \iff \left(1 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdots\cdots\cdots(*)$

(i)　$n = 2$ のとき

$\left(1 + \frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ より(＊)は成立し, $b_2 > a_2$ となる。

(ii)　$n = k$ のとき

$b_k > a_k$ すなわち $\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{3}{4}\right)^k$ が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} - \left(1 + \frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} &> \frac{3}{4}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(1 + \frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\\ &= 3\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} - 2\left(1 + \frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}\\ &= \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} = k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} > 0\end{aligned}$$

よって, $n = k+1$ のとき(＊)は成立するので, $b_{k+1} > a_{k+1}$ となる。

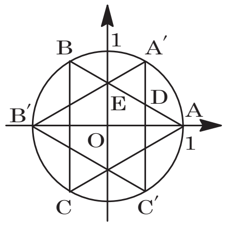
(i)(ii)より, $n \geqq 2$ のとき, $b_n > a_n$ である。

［解 説］

類題を毎年のように見かける超頻出問題です。余事象で考えるのがポイントです。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　$\omega=\cos 120°+i\sin 120°$，$\omega^2=\cos 240°+i\sin 240°$ より，

A′ を表す複素数は，$1\times(\cos 60°+i\sin 60°)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

B′ を表す複素数は，

$$\omega(\cos 60°+i\sin 60°)=\cos 180°+i\sin 180°=-1$$

C′ を表す複素数は，

$$\omega^2(\cos 60°+i\sin 60°)=\cos 300°+i\sin 300°=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　△ABC と△A′B′C′ は合同な正三角形で，しかも虚軸について対称となっているので，辺 AB と辺 A′B′ の交点 E は虚軸上にある。また，辺 AB と辺 A′C′ の交点 D を表す複素数の実部は $\dfrac{1}{2}$ である。

したがって，点 A，D，E，B の実部は，それぞれ1，$\dfrac{1}{2}$，0，$-\dfrac{1}{2}$ なので，辺 AB は△A′B′C′ によって三等分されている。

そして虚軸に関して対称移動すると，辺 A′B′ は△ABC によって三等分されていることになる。

さらに，原点を中心に 2 つの三角形を±120° 回転すると，△ABC と△A′B′C′ の一方の三角形の各辺は，もう一方の三角形の辺との交点によって三等分されていることがわかる。

［解　説］

(2)は結論があまりにも明らかなので，どこからどこまで書けばよいのか，難しいところです。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1) 点Pにおける接線を $y = mx + n$ とおくと，条件より，

$$f(x) - (mx + n) = (x - a)^2(x - b)$$

$$x^3 + px^2 + (q - m)x - n = (x - a)^2(x - b)$$

x^2 の係数を比べて，$p = -b - 2a$，$b = -2a - p$

(2) $x = c$ における $y = f(x)$ の接線を $y = kx + l$ とおくと，(1)と同様にして，

$$f(x) - (kx + l) = (x - c)^2(x - a)$$

x^2 の係数を比べて，$p = -a - 2c$，$c = -\dfrac{a+p}{2}$

(3) $f'(x) = 3x^2 + 2px + q$ なので，

$$\begin{aligned} f'(b) - f'(a) &= (3b^2 + 2pb + q) - (3a^2 + 2pa + q) \\ &= 3(-2a - p)^2 + 2p(-2a - p) - 3a^2 - 2pa \\ &= 9a^2 + 6ap + p^2 = (3a + p)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(a) - f'(c) &= (3a^2 + 2pa + q) - (3c^2 + 2pc + q) \\ &= 3a^2 + 2pa - 3\left(-\frac{a+p}{2}\right)^2 - 2p\left(-\frac{a+p}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(9a^2 + 6ap + p^2) = \frac{1}{4}(3a + p)^2 \end{aligned}$$

以上より，$\dfrac{f'(b) - f'(a)}{f'(a) - f'(c)} = 4$

［解 説］

接線の方程式が不要なときは，上記の(1)(2)のように解いたほうが，省エネですみます。