1

解答解説のページへ

xy 平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える。ただし，a，b，c は定数で $a\neq 0$ とする。この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ での接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする。

(1)　$f(p)$ が p の 1 次関数になるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ。

(2)　$x_1=p$，$x_2=f(x_1)$，$x_3=f(x_2)$，$\cdots$，$x_n=f(x_{n-1})$ とおくとき，(1)で求めた条件の下で x_n $(n\geqq 2)$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフを書け。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，x の関数 $y=\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x を求めよ。

3

解答解説のページへ

複素数平面上の 2 点$z_1=(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}i$と$z_2=\sqrt{3}i$を通る円のうち，中心が実軸上にある円$C$について次の問いに答えよ。

(1) 円Cの中心wと半径rを求めよ。

(2) 複素数z_1-wとz_2-wの偏角をそれぞれ求めよ。

(3) 線分z_1w，線分z_2wと短い方の円弧z_1z_2で囲まれる扇形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または 4 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\dfrac{1}{2}$ である。

(1)　A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ。

(2)　A が 2 連勝して終了する確率を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$y=a(x-b)^2+c$ に対して，$y'=2a(x-b)$

点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線は，$q=a(p-b)^2+c$ から，

$$y-a(p-b)^2-c=2a(p-b)(x-p)$$

x 軸との交点は，$y=0$ を代入して，

$$-a(p-b)^2-c=2a(p-b)(x-p)$$

$p=b$ のときは交点が存在しないので，$p\neq b$ として，

$$x=p-\frac{1}{2}(p-b)-\frac{c}{2a(p-b)}=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}b-\frac{c}{2a(p-b)}$$

よって，$f(p)=\dfrac{1}{2}p+\dfrac{1}{2}b-\dfrac{c}{2a(p-b)}$

すると，$f(p)$ が p の 1 次関数になる条件は，$b\neq p$ かつ $c=0$ である。

(2)　(1)から，$x_n=f(x_{n-1})=\dfrac{1}{2}x_{n-1}+\dfrac{1}{2}b$ より，$x_n-b=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-b)$

$$x_n-b=(x_1-b)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(p-b)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$x_n=b+(p-b)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

［解 説］

接線の x 切片の条件を問う基本問題です。(2)の漸化式もよく知られたタイプです。

2

問題のページへ

(1)　$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$に対して，

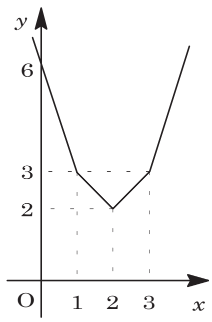
(i)　$x<1$のとき　$y=-(x-1)-(x-2)-(x-3)=-3x+6$

(ii)　$1\leqq x<2$のとき　$y=(x-1)-(x-2)-(x-3)=-x+4$

(iii)　$2\leqq x<3$のとき　$y=(x-1)+(x-2)-(x-3)=x$

(iv)　$x\geqq 3$のとき　$y=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$

以上まとめると，関数$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$のグラフは右図の折れ線のようになる。



(2)　(1)と同様に考えると，関数$y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$のグラフは，連続な折れ線となり，$n\leqq x<n+1$のとき傾き$-1$，$n+1\leqq x<n+2$のとき傾き 1 なので，この折れ線の傾きが負から正に変わるのは，$x=n+1$の前後である。

よって，最小値を与えるxは$x=n+1$であり，その値は，

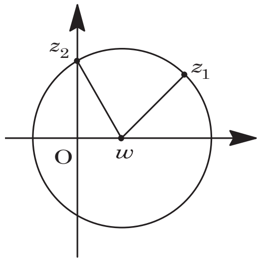
$$\sum_{k=1}^{2n+1}|n+1-k|=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)+0+\sum_{k=n+2}^{2n+1}(k-n-1)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\times 2=n(n+1)$$

［解　説］

有名問題です。(2)の解は，(1)から類推するものでしょうが，どの程度まで書けばよいのか迷います。もう少し詳しく書いたほうがよかったかもしれません。

3

問題のページへ



(1)　w は実数で，$|w-\sqrt{3}i|=|w-(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}i|$ より，

$$w^2+3=(w-1-\sqrt{2})^2+2$$

まとめて，$2(1+\sqrt{2})w=2+2\sqrt{2}$ より，$w=1$

また，半径は，$r=|1-\sqrt{3}i|=\sqrt{1+3}=2$

(2)　偏角を$0°$以上$360°$未満で記すと，

$z_1-w=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ より，$\arg(z_1-w)=45°$

$z_2-w=-1+\sqrt{3}i$ より，$\arg(z_2-w)=120°$

(3)　(2)から，$\angle z_1wz_2=120°-45°=75°$ なので，求める扇形の面積を S とすると，

$$S=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{75}{360}=\frac{5}{6}\pi$$

［解 説］

複素数についての基本の確認問題です。手堅くゲットしたいものです。

4

問題のページへ

(1)　誰も 2 連勝せずに 4 回目で終了するのは，勝者が順に，ACBA または BCAB の場合なので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{1}{8}$$

よって，A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率は，

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

(2)　A が 2 連勝して終了するのは，AA または BCAA の場合なので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

［解 説］

(1)は A が 2 連勝，B が 2 連勝，C が 2 連勝と場合分けをしようかと思いましたが，(2)の設問をみて，余事象で考えることにしました。