1

解答解説のページへ

関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2+ax+b,\quad g(x)=x+c$$

ただし, a, b, c は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ となるための a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで，$0\leqq x\leqq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち, 1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

a, b を $2b < 3a < 6b$ を満たす正の定数とする。

(1) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x+3y \leqq 12,\ 3x+y \leqq 12,\ a(x-3)+b(y-2) \leqq 0,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

(2) 実数 x, y が(1)の連立不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値を a, b を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，iを虚数単位とする。

(1)　$\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$として$x$についての恒等式

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

を示せ。

(2)　nは5以上の自然数とする。$\beta = \cos\dfrac{360^\circ}{n} + i\sin\dfrac{360^\circ}{n}$として，等式

$$(1-\beta)(1-\beta^2)(1-\beta^3)\cdots(1-\beta^{n-1}) = n$$

を示せ。

1　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x+c$ に対して，$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ より，

$$\int_0^1 (x^2+ax+b)\,dx=\int_0^1 (x+c)\,dx,\ \left[\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}+bx\right]_0^1=\left[\frac{x^2}{2}+cx\right]_0^1$$

よって，$\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=\frac{1}{2}+c$ より，$c=\frac{a}{2}+b-\frac{1}{6}$

(2)　$f(x)=g(x)$ とすると，$x^2+(a-1)x+b-c=0$

(1)より，$x^2+(a-1)x-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=0$ ………(＊)

さて，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ のグラフの共有点の個数は，(＊)の実数解の個数に一致する。よって，$h(x)=x^2+(a-1)x-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$ とおき，$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)=0$ の実数解の個数を求める。

ここで，$h(0)=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)$，$h(1)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)$ であり，さらに，$h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}<0$ に注目すると，

(i)　$a>\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)<0$，$h(1)>0$ より，$0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 1 個の実数解をもつ。

よって，$f(x)$，$g(x)$ のグラフは 1 個の共有点をもつ。

(ii)　$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)\geqq 0$，$h(1)\geqq 0$ より，$0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 2 個の実数解をもつ。

よって，$f(x)$，$g(x)$ のグラフは 2 個の共有点をもつ。

(iii)　$a<-\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)>0$，$h(1)<0$ より，$0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 1 個の実数解をもつ。

よって，$f(x)$，$g(x)$ のグラフは 1 個の共有点をもつ。

［解　説］

$h\left(\frac{1}{2}\right)<0$ であることが発見できれば，場合分けの繁雑さが軽減できます。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　4 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9C_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^4 - 2 = 14$ 通りである。これより, 4 桁の自然数は $36\times14 = 504$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9C_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は, 千の位が 0 でないことに注意すると，$1\times2^3 - 1 = 7$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $9\times7 = 63$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は，$504 + 63 = 567$ である。

(2)　(1)と同様に, n 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9C_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^n - 2$ 通りである。これより, 4 桁の自然数は $36(2^n - 2)$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9C_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は, 最高位が 0 でないことに注意すると，$1\times2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$ 通りである。これより, 4 桁の自然数は $9(2^{n-1} - 1)$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は,

$$36(2^n - 2) + 9(2^{n-1} - 1) = 81(2^{n-1} - 1)$$

［解 説］

(1)の一般化が(2)ですが，全く同じ考え方で解をつくることができます。

3

問題のページへ

(1)　$x+3y \leqq 12$ ……①，$3x+y \leqq 12$ ……②，$x \geqq 0$ ……③，$y \geqq 0$ ……④としたとき，①②③④の満たす領域は，4 点 O(0, 0)，A(4, 0)，B(3, 3)，C(0, 4) を頂点とする四角形の内部または周上である。

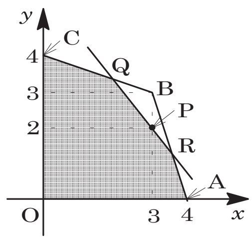
ここで，$a(x-3)+b(y-2) \leqq 0$ ……⑤の表す領域は，点 P(3, 2) を通る直線 $a(x-3)+b(y-2)=0$ ……⑤′を境界として，原点を含む側である。

また，条件より，$0<2b<3a<6b$ なので，

$$\frac{2}{3}<\frac{a}{b}<2,\ -2<-\frac{a}{b}<-\frac{2}{3}\ \cdots\cdots⑥$$

さて，直線 PC の傾きは $-\frac{2}{3}$，直線 PA の傾きは -2 なので，⑥より直線⑤′は線分 BC, BA とともに交わる。

以上より，求める領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含む。



(2)　⑤′と線分 BC : $x+3y=12$ ……①′との交点 Q は，

①′より $x=12-3y$ として，⑤′に代入すると，$a(9-3y)+b(y-2)=0$

$$y=\frac{9a-2b}{3a-b},\ x=12-3\cdot\frac{9a-2b}{3a-b}=\frac{9a-6b}{3a-b}$$

また，⑤′と線分 BA : $3x+y=12$ ……②′との交点 R は，

②′より $y=12-3x$ として，⑤′に代入すると，$a(x-3)+b(10-3x)=0$

$$x=\frac{3a-10b}{a-3b},\ y=12-3\cdot\frac{3a-10b}{a-3b}=\frac{3a-6b}{a-3b}$$

したがって，$\mathrm{Q}\left(\frac{9a-6b}{3a-b},\ \frac{9a-2b}{3a-b}\right)$，$\mathrm{R}\left(\frac{3a-10b}{a-3b},\ \frac{3a-6b}{a-3b}\right)$

さて，$x+y=k$ とおき，直線 $y=-x+k$ が(1)の領域と共有点をもつような k の最大値を，図を利用して求める。

(i)　$-2<-\frac{a}{b}<-1\ (b<a<2b)$ のとき

点 Q を通るとき，k は最大値 $\frac{9a-6b}{3a-b}+\frac{9a-2b}{3a-b}=\frac{18a-8b}{3a-b}$ をとる。

(ii)　$-1 \leqq -\frac{a}{b}<-\frac{2}{3}\ \left(\frac{2}{3}b<a \leqq b\right)$ のとき

点 R を通るとき，k は最大値 $\frac{3a-10b}{a-3b}+\frac{3a-6b}{a-3b}=\frac{6a-16b}{a-3b}$ をとる。

［解 説］

東工大で 98 年に同じような問題が出ていますが，本問は $0<2b<3a<6b$ という条件のおかげで，場合分けがずいぶん簡単になりました。

4

問題のページへ

(1)　$\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ のとき，$\alpha^5 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$

これより，方程式 $x^5 = 1$ の解は，$x = 1$，α，α^2，α^3，α^4 となり，

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4)$$

また，$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ より，

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

(2)　$\beta = \cos\dfrac{360^\circ}{n} + i \sin\dfrac{360^\circ}{n}$ のとき，$\beta^n = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$

これより，方程式 $x^n = 1$ の解は，$x = 1$，β，β^2，β^3，…，β^{n-1} となり，

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\beta)(x-\beta^2)(x-\beta^3)\cdots(x-\beta^{n-1})$$

また，$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1)$ より，

$$(x-\beta)(x-\beta^2)(x-\beta^3)\cdots(x-\beta^{n-1}) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1$$

$x = 1$ を代入すると，$(1-\beta)(1-\beta^2)(1-\beta^3)\cdots(1-\beta^{n-1}) = n$ となる。

［解 説］

この程度の記述でよいのか，もう少し詳しく書いた方がよいのか，迷ってしまいます。