1

解答解説のページへ

$f(x)$を微分可能な関数とする。

(1)　n を自然数とするとき，等式$\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x^n\ (x \neq 1)$を満たす関数$f(x)$を求めよ。

(2)　任意の実数 x, a に対して，等式$\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}\ (x \neq a)$を満たし,かつ条件$f(0)=1$および$f'(0)=2$を満たす関数$f(x)$を求めよ。

2

解答解説のページへ

(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち, 1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_2 \neq 0)$ に対して，点 $\mathrm{C}(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\mathrm{D}(x_2,\ 0)$をとり，直線 AC と y 軸の交点を E とする。ただし，原点 O は直線 AB 上にはないとする。

(1) 直角三角形 ODE の面積を S とするとき，S を x_1，y_1，x_2，y_2 で表せ。

(2) A，B が楕円 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上を動くとき，S の最大値を a，b で表せ。

(3) A，B が L 上にあって(2)で求めた S の最大値を与えるとき，点 C は楕円 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2=1$ 上にあることを示せ。

4

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とするとき，次を示せ。ただし，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とし，i を虚数単位とする。

(1)　$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

ただし，k は自然数とし，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数とする。

(2)　$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3)　$\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$

5

解答解説のページへ

2 点$(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 2,\ 0)$を通る直線を l とし，中心が$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が 1 の球面を C とする。点 P が l 上にあり点 Q が C 上にあるとし，線分 PQ は直線 l と線分 RQ に垂直であるとする。

(1) 点 P の存在する範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さを最小にする点 P の座標を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x^n$ より，$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x^{n+1} - x^n$

両辺を x で微分して，$f(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1}$

(2)　$\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}$ より，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}(x-a)\{f(x)+f(a)\}$

両辺を x で微分して，$f(x) = \dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\} + \dfrac{1}{2}(x-a)f'(x)$

$\dfrac{1}{2}f(x) = \dfrac{1}{2}f(a) + \dfrac{1}{2}(x-a)f'(x)$，$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x)$

ここで，$x=0$ を代入すると，$f(0) = f(a) - af'(0)$

さらに，$f(0)=1$，$f'(0)=2$ より，$1 = f(a) - 2a$，$f(a) = 2a+1$

すると, a は任意の実数なので，$f(x) = 2x+1$ となる。

［解 説］

(2)では，2 回微分を実行すると，$f''(x)=0$ となり，これから同じ結論が導けます。ただ問題文には，$f(x)$ は微分可能としか書かれていないので，いきなり $f''(x)$ を利用するのはまずいでしょう。

2

問題のページへ

(1)　4 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^4 - 2 = 14$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $36\times 14 = 504$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は，千の位が 0 でないことに注意すると，$1\times 2^3 - 1 = 7$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $9\times 7 = 63$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は，$504 + 63 = 567$ である。

(2)　(1)と同様に，n 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^n - 2$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $36(2^n - 2)$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は，最高位が 0 でないことに注意すると，$1\times 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $9(2^{n-1} - 1)$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は，

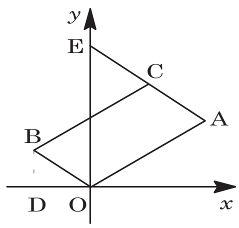
$$36(2^n - 2) + 9(2^{n-1} - 1) = 81(2^{n-1} - 1)$$

［解 説］

(1)の一般化が(2)ですが，全く同じ考え方で解をつくることができます。

3

問題のページへ



(1)　直線 AC の傾きは $\dfrac{y_2}{x_2}$ より，その方程式は，

$$y - y_1 = \frac{y_2}{x_2}(x - x_1)$$

$x = 0$ とすると，$y = y_1 - \dfrac{x_1 y_2}{x_2} = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2}$

よって，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2}\right)$ となる。

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE} = \frac{1}{2}\left| x_2 \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2} \right| = \frac{1}{2}\left| x_2 y_1 - x_1 y_2 \right|$$

(2)　A，B が $L : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上にあるので，$\mathrm{A}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，$\mathrm{B}(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ とおくことができ，

$$S = \frac{1}{2}\left| ab\sin\theta\cos\varphi - ab\cos\theta\sin\varphi \right| = \frac{1}{2}ab\left|\sin(\theta - \varphi)\right|$$

θ，φ は任意の実数より，$\left|\sin(\theta-\varphi)\right| = 1$ のとき，S は最大値 $\dfrac{1}{2}ab$ をとる。

(3)　(2)と同様にして，$\mathrm{C}(a\cos\theta + a\cos\varphi,\ b\sin\theta + b\sin\varphi)$ とおくと，

$$\frac{(a\cos\theta + a\cos\varphi)^2}{2a^2} + \frac{(b\sin\theta + b\sin\varphi)^2}{2b^2} = \frac{2 + 2(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi)}{2}$$
$$= \frac{2 + 2\cos(\theta - \varphi)}{2}$$

さて，S が最大となるのは $\left|\sin(\theta-\varphi)\right| = 1$ すなわち $\sin(\theta - \varphi) = \pm 1$ のときなので，このとき $\cos(\theta - \varphi) = 0$ となり，

$$\frac{(a\cos\theta + a\cos\varphi)^2}{2a^2} + \frac{(b\sin\theta + b\sin\varphi)^2}{2b^2} = 1$$

$$\left(\frac{a\cos\theta + a\cos\varphi}{\sqrt{2}a}\right)^2 + \left(\frac{b\sin\theta + b\sin\varphi}{\sqrt{2}b}\right)^2 = 1$$

以上より，点 C は楕円 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2 = 1$ 上にある。

［解　説］

楕円をパラメータ表示すると，自然に結論が導けます。

4

問題のページへ

(1)　$\alpha=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ とすると，$\overline{\alpha}=\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}$

$$\alpha^k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad \overline{\alpha}^k=\cos\frac{2\pi k}{n}-i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

よって，$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\frac{2\pi k}{n}$

(2)　$\alpha^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ より，方程式 $x^n=1$ の解は，$x=1$，α，α^2，$\cdots$，α^{n-1} となり，

$$x^n-1=(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})$$

また，$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ より，

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

$x=1$ を代入すると，$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$ となる。

(3)　k を $1\leqq k\leqq n-1$ を満たす自然数とするとき，

$$1-\alpha^k=1-\cos\frac{2\pi k}{n}-i\sin\frac{2\pi k}{n}=2\sin^2\frac{\pi k}{n}-2i\sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}$$

$$=2\sin\frac{\pi k}{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n}-i\cos\frac{\pi k}{n}\right)$$

$$|1-\alpha^k|=\left|2\sin\frac{\pi k}{n}\right|\left|\sin\frac{\pi k}{n}-i\cos\frac{\pi k}{n}\right|$$

$\frac{\pi}{n}\leqq\frac{\pi k}{n}\leqq\frac{n-1}{n}\pi$ より，$\sin\frac{\pi k}{n}>0$ なので，

$$|1-\alpha^k|=2\sin\frac{\pi k}{n}\sqrt{\sin^2\frac{\pi k}{n}+\cos^2\frac{\pi k}{n}}=2\sin\frac{\pi k}{n}$$

ここで, (2)より，$n=|1-\alpha||1-\alpha^2|\cdots|1-\alpha^{n-1}|$ なので,

$$n=2\sin\frac{\pi}{n}2\sin\frac{2\pi}{n}\cdots2\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

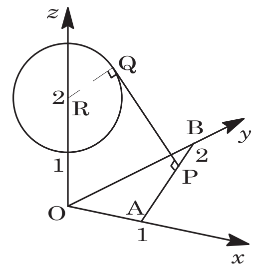
以上より，$\frac{n}{2^{n-1}}=\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi$

［解 説］

(2)は文系の類題と異なり，誘導がまったくないので，経験がないと上のような解は難しいでしょう。有名問題なのですが。

5

問題のページへ



(1)　$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 2,\ 0)$とすると，$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$

$$l:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+t(-1,\ 2,\ 0)$$
$$=(1-t,\ 2t,\ 0)$$

すると，l 上に点 P があるので，$P(1-t,\ 2t,\ 0)$とおけ，点Pを含んでlに垂直な平面は,

$$-\{x-(1-t)\}+2(y-2t)=0,\ x-2y+5t-1=0$$

この平面が，中心$R(0,\ 0,\ 2)$で半径が 1 の球面と接する条件は,

$$\frac{|5t-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1,\ |5t-1|=\sqrt{5},\ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{5}$$

ここで，$t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{5}$，$t_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$とし，このときの点 P をそれぞれ$P_1$，$P_2$とおくと，$P_1\left(\dfrac{4+\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2-2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$，$P_2\left(\dfrac{4-\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2+2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$となる。

以上より，点Pの存在する範囲は，図から線分P_1P_2である。

(2)　$\triangle PQR$が直角三角形なので，$PQ^2=PR^2-RQ^2=PR^2-1$となり,

$$PQ^2=(1-t)^2+(2t)^2+(-2)^2-1=5t^2-2t+4=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{19}{5}$$

よって，$t=\dfrac{1}{5}$のとき PQ は最小値をとり，このとき$P\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5},\ 0\right)$である。

［解 説］

(1)は，l に垂直な平面で球をサンドイッチにするという考え方で解をつくりました。その際，平面の方程式や点と平面の距離の公式を利用していますが，これは，図形をxy 平面に正射影したと考えて，直線の方程式や点と直線の距離の公式を用いたとみなしても構いません。