1

解答解説のページへ

xy 平面上の放物線 $A: y=x^2$, $B: y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1-x_2=2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2)　$x_1-x_2=2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。

2

解答解説のページへ

実数 a, b, c に対して $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx = \frac{1}{2},\ \int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx = 0$$

を満たす実数 $p,\ q$ が存在するための $a,\ b,\ c$ の条件と，そのときの $p,\ q$ を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。

3　解答解説のページへ

1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC を底面とする四面体 PABC を考える。$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}=2$ とする。

(1) 四面体 PABC の体積を求めよ。

(2) 辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F が $\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$，$\cos\angle\mathrm{EPF}=\dfrac{4}{5}$ を満たすとき，長さ AE を求めよ。

4

解答解説のページへ

点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

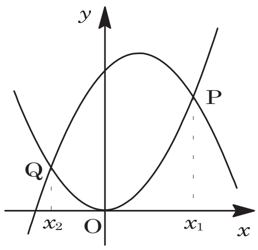
1

問題のページへ

(1)　$A: y=x^2$ ……①，$B: y=-(x-a)^2+b$ ……②の交点は，

$$x^2=-(x-a)^2+b,\ \ 2x^2-2ax+a^2-b=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

よって，$D/4=a^2-2(a^2-b)=-a^2+2b>0$ のもとで，③の解が x_1，x_2 $(x_1>x_2)$ より，



$$x_1=\frac{a+\sqrt{-a^2+2b}}{2},\ \ x_2=\frac{a-\sqrt{-a^2+2b}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

条件より，$x_1-x_2=2$ なので，$\sqrt{-a^2+2b}=2$

$$-a^2+2b=4,\ \ b=\frac{1}{2}a^2+2\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(2)　$\mathrm{P}(x_1,\ x_1^{\,2})$，$\mathrm{Q}(x_2,\ x_2^{\,2})$ から，直線PQ は，傾きが $\dfrac{x_1^{\,2}-x_2^{\,2}}{x_1-x_2}=x_1+x_2$ なので，

$$y-x_1^{\,2}=(x_1+x_2)(x-x_1),\ \ y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$$

④⑤より，$x_1+x_2=a$，$x_1x_2=\dfrac{a^2-b}{2}=\dfrac{a^2-4}{4}$

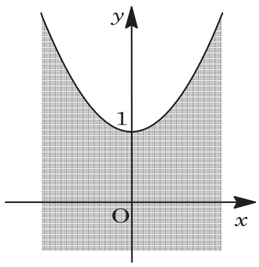
よって，直線PQ は，$y=ax-\dfrac{a^2-4}{4}$ ……⑥となる。

ここで，直線 PQ が通過する領域は，⑥を a についての方程式としてみたとき，実数解をもつ条件として表される。

$$4y=4ax-a^2+4,\ \ a^2-4xa+4y-4=0$$

よって，$D/4=4x^2-(4y-4)\geqq 0$ から，$y\leqq x^2+1$

この領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解　説］

有名な直線の通過領域の問題です。a の範囲に制限がないため，実数解条件だけで一件落着です。

2

問題のページへ

$f'(x)(px+q)=(2ax+b)(px+q)=2apx^2+(2aq+bp)x+bq$ なので，

$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2}$ より，$\int_0^1 \left\{2apx^2+(2aq+bp)x+bq\right\}dx=\frac{1}{2}$ ………①

$\int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$ より，$\int_{-1}^1 \left\{2apx^2+(2aq+bp)x+bq\right\}dx=0$ となり，

$$\int_0^1 (2apx^2+bq)\,dx=0 \text{………②}$$

①②より，$\int_0^1 (2aq+bp)x\,dx=\frac{1}{2}$ ………③

②より，$\frac{2}{3}ap+bq=0$，$2ap+3bq=0$ ………④

③より，$\frac{1}{2}(2aq+bp)=\frac{1}{2}$，$bp+2aq=1$ ………⑤

④⑤より，$(3b^2-4a^2)p=3b$ ……⑥，$(4a^2-3b^2)q=2a$ ……⑦

(i)　$4a^2-3b^2=0$ のとき

⑥⑦より，$a=b=0$ となるが，これは⑤を満たさない。

(ii)　$4a^2-3b^2\neq 0$ のとき

⑥より $p=\frac{3b}{3b^2-4a^2}$，⑦より $q=\frac{2a}{4a^2-3b^2}$ となる。

(i)(ii)より，実数 $p,\,q$ が存在するための条件は，$4a^2-3b^2\neq 0$ であり，

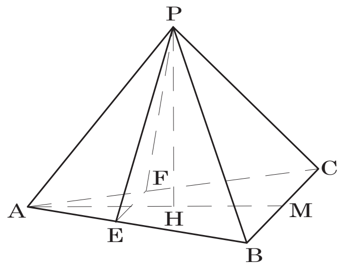
$$p=\frac{3b}{3b^2-4a^2},\quad q=\frac{2a}{4a^2-3b^2}$$

[解 説]

定積分の計算問題の様相を示していますが，実質的には，連立方程式の処理技術がポイントとなっています。

3

問題のページへ



(1) まず，△ABC は正三角形で，PA = PB = PC より，点 P から△ABC に下ろした垂線の足 H は，△ABC の重心となる。

そこで, BC の中点を M とすると,

$$\mathrm{AM} = 3\sin 60^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,,\quad \mathrm{AH} = \frac{2}{3}\mathrm{AM} = \sqrt{3}$$

よって，$\mathrm{PH} = \sqrt{\mathrm{PA}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{4-3} = 1$

すると, 四面体 PABC の体積 V は,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cdot 1 = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

(2)　AE = AF = x とすると, EF // BC より EF = x となる。

△PAB に余弦定理を適用して，$\cos\angle\mathrm{PAB} = \dfrac{4+9-4}{2\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{3}{4}$ より，

$$\mathrm{PE}^2 = 4 + x^2 - 2\cdot 2\cdot x\cdot\frac{3}{4} = x^2 - 3x + 4$$

同様にして，$\mathrm{PF}^2 = x^2 - 3x + 4$ となり，また $\cos\angle\mathrm{EPF} = \dfrac{4}{5}$ なので，△PEF に余弦定理を適用すると,

$$x^2 = (x^2 - 3x + 4) + (x^2 - 3x + 4) - 2(x^2 - 3x + 4)\cdot\frac{4}{5}$$

$$3x^2 + 6x - 8 = 0\,,\quad x = \frac{-3\pm\sqrt{33}}{3}$$

よって, $0 < x \leqq 3$ より，$\mathrm{AE} = \dfrac{-3+\sqrt{33}}{3}$

［解 説］

空間図形への三角比の応用を題材とした基本問題です。断面に注目して，余弦定理を適用していきます。

4

問題のページへ

(1)　$X(8)=2$ となるのは，8 回の移動のうち，正の向きに 5 回，負の向きに 3 回進んだときなので，その確率は ${}_8\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{32}$ である。

(2)　正の向きに a 回，負の向きに b 回進んだとき，$X(7)=k$ となったとすると，$a+b=7$，$a-b=k$ より，k は奇数となる。

また，正の向きに進む確率と負の向きに進む確率は同じなので，$X(7)=k$ となる確率と $X(7)=-k$ となる確率は等しい。

(i)　$|X(7)|=1$ のとき　正の向きに 4 回，負の向きに 3 回進むと $X(7)=1$ となることより，$|X(7)|=1$ の確率は ${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{35}{64}$ となる。

(ii)　$|X(7)|=3$ のとき　正の向きに 5 回，負の向きに 2 回進むと $X(7)=3$ となることより，$|X(7)|=3$ の確率は ${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{21}{64}$ となる。

(iii)　$|X(7)|=5$ のとき　正の向きに 6 回，負の向きに 1 回進むと $X(7)=5$ となることより，$|X(7)|=5$ の確率は ${}_7\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{7}{64}$ となる。

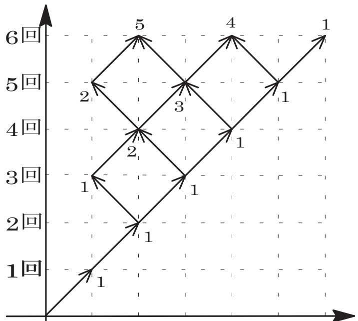
(iv)　$|X(7)|=7$ のとき　正の向きに 7 回進むと $X(7)=7$ となることより，$|X(7)|=7$ の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^7\times 2=\frac{1}{64}$ となる。

(i)〜(iv)より，$|X(7)|$ の期待値は，$1\times\frac{35}{64}+3\times\frac{21}{64}+5\times\frac{7}{64}+7\times\frac{1}{64}=\frac{35}{16}$ である。

(3)　1 回目が正の向きに進んだとき，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合について，横軸に P の座標，縦軸に移動回数，グラフの中の数字をその点に到達したときの条件を満たす場合の数とすると，右図のようになる。

すると，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合は，$5+4+1=10$ 通りある。

また，1 回目に負の向きに進んだときも同様となるので，求める確率は，$10\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 2=\frac{5}{16}$ である。



［解 説］

(3)は，上のようなグラフを書いて場合の数を数えると，もれや重複が防げます。