1

解答解説のページへ

xy 平面上の放物線 $A : y = x^2$, $B : y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2)　$x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

z を複素数とし，i を虚数単位とする。

(1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。

(2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

曲線 $y = x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h, 体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

(1)　水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2)　容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

4

解答解説のページへ

点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

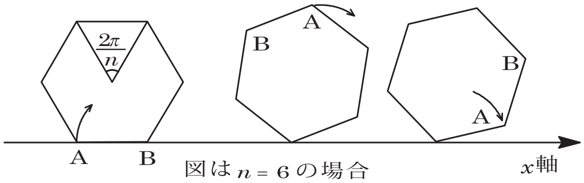
5

解答解説のページへ

半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある。ひとつの辺 AB が x 軸含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける。点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

(1) $L(6)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ。



図は $n=6$ の場合

1

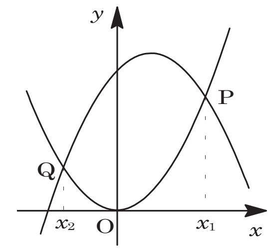
問題のページへ

(1)　$A: y=x^2$ ……①, $B: y=-(x-a)^2+b$ ……②の交点は,

$$x^2=-(x-a)^2+b,\ 2x^2-2ax+a^2-b=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

よって, $D/4=a^2-2(a^2-b)=-a^2+2b>0$ のもとで, ③の解が x_1, x_2 $(x_1>x_2)$ より,

$$x_1+x_2=a,\ x_1x_2=\frac{a^2-b}{2} \cdots\cdots\cdots ④$$



条件より, $x_1-x_2=2$ なので, $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2$

④より, $\sqrt{-a^2+2b}=2$, $-a^2+2b=4$, $b=\frac{1}{2}a^2+2$ ………⑤

(2)　$\mathrm{P}(x_1,\ x_1^2)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ x_2^2)$ から, 直線 PQ は, 傾きが $\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2$ なので,

$$y-x_1^2=(x_1+x_2)(x-x_1),\ y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$$

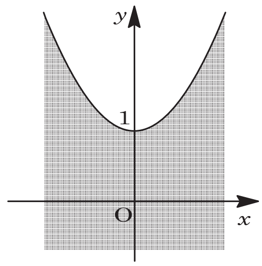
④⑤より, 直線 PQ は, $y=ax-\frac{a^2-b}{2}=ax-\frac{a^2-4}{4}$ ……⑥となる。

ここで, 直線 PQ が通過する領域は, ⑥を a についての方程式としてみたとき, 実数解をもつ条件として表される。

$$4y=4ax-a^2+4,\ a^2-4xa+4y-4=0$$

よって, $D/4=4x^2-(4y-4)\geqq 0$ から, $y\leqq x^2+1$

この領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



(3)　④より, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(x_1-x_2)^2+(x_1^2-x_2^2)^2$

$$=(x_1-x_2)^2\left\{1+(x_1+x_2)^2\right\}=(-a^2+2b)(1+a^2)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$ より, $(-a^2+2b)(1+a^2)=4$, $b=\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{a^2+1}$ ………⑦

ここで, PQ の中点の y 座標は, $y=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}$ であり, ④を用いると, $y=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2-b}{2}=\frac{b}{2}$ となるので, ⑦より,

$$y=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{4}(a^2+1)+\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{4}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

等号は $\frac{1}{4}(a^2+1)=\frac{1}{a^2+1}$ のとき, すなわち $(a^2+1)^2=4$, $a=\pm 1$ で成立する。

よって, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値は $\frac{3}{4}$ である。

［解 説］

有名な直線の通過領域の問題です。a の範囲に制限がないため, 実数解条件だけで一件落着です。(3)は, 相加・相乗平均の関係を利用します。

© 電送数学舎 2003

2

問題のページへ

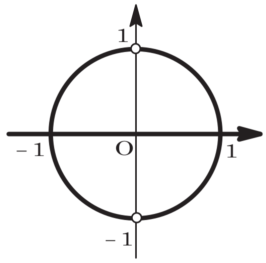
(1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}=\dfrac{2z}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{2z}{z^2+1}$ が実数より，$\dfrac{2z}{z^2+1}=\dfrac{2\overline{z}}{\overline{z}^2+1}$

そこで，$z\neq\pm i$ のもとで，

$$z(\overline{z}^2+1)=\overline{z}(z^2+1)\,,\ |z|^2\overline{z}-|z|^2z+z-\overline{z}=0\,,\ (|z|^2-1)(z-\overline{z})=0$$

$|z|^2-1=0$ のとき，点 z は $|z|=1$ から原点中心で半径 1 の円を描く。また $z-\overline{z}=0$ のとき，点 z は $z=\overline{z}$ から実軸を描く。

これを図示すると，点 z の描く図形 P は右図の太線部となる。ただし，白丸の点は除く。



(2) (1)より $z\neq\pm i$ なので，$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ から $w\neq 0$ となり，

$$w(z-i)=z+i\,,\ (w-1)z=(w+1)i$$

$w=1$ では成立しないので，$w\neq 1$ のもとで，$z=\dfrac{(w+1)i}{w-1}$ となる。

(i) $z=\overline{z}$ のとき

$$\frac{(w+1)i}{w-1}=\frac{(\overline{w}+1)(-i)}{\overline{w}-1}\,,\ (w+1)(\overline{w}-1)=-(w-1)(\overline{w}+1)\,,\ w\overline{w}=1$$

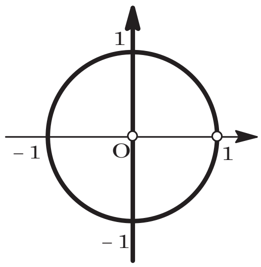
よって，$|w|=1$ より，点 w は原点中心で半径 1 の円を描く。

(ii) $|z|=1$ のとき

$$\left|\frac{(w+1)i}{w-1}\right|=1\,,\ \frac{|w+1|\cdot|i|}{|w-1|}=1\,,\ |w+1|=|w-1|$$

よって，点 w は 2 点1，-1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸を描く。

(i)(ii)より，点 w の描く図形は右図の太線部である。ただし，白丸の点は除く。



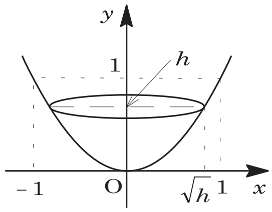
［解　説］

複素数平面上の図形についての基本的な問題です。$z=x+yi$ と設定しなくても，結論が導けます。

© 電送数学舎 2003

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　水の深さが h のときの水面の面積を $S(h)$ とすると,

$$S(h)=\pi(\sqrt{h})^2=\pi h$$

さて, $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=S(h)\dfrac{dh}{dt}$ より,

$$\frac{dV}{dt}=\pi h\frac{dh}{dt}\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より, $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より, $\pi h\dfrac{dh}{dt}=-\sqrt{h}$, $\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$

(2)　(1)より, $\sqrt{h}\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi}$ となるので, 両辺を t で積分して,

$$\int\sqrt{h}\frac{dh}{dt}dt=-\frac{1}{\pi}\int dt,\ \int\sqrt{h}\,dh=-\frac{1}{\pi}\int dt,\ \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{\pi}t+C$$

ここで, $t=0$ のとき $h=1$ なので, $C=\dfrac{2}{3}$ となり, $\dfrac{2}{3}h^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{\pi}t+\dfrac{2}{3}$

すると, $t=T$ のとき $h=0$ から, $-\dfrac{1}{\pi}T+\dfrac{2}{3}=0$ となり, $T=\dfrac{2\pi}{3}$ である。

［解 説］

久々に水の問題です。しかし, (2)については, 上のような解法が普通ですが, 現行の数Ⅲでは, ちょっと無理でしょう。

© 電送数学舎 2003

4

問題のページへ

(1)　$X(8)=2$ となるのは，8 回の移動のうち，正の向きに 5 回，負の向きに 3 回進んだときなので，その確率は ${}_8\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{32}$ である。

(2) 正の向きに a 回，負の向きに b 回進んだとき，$X(7)=k$ となったとすると，$a+b=7$，$a-b=k$ より，k は奇数となる。

また，正の向きに進む確率と負の向きに進む確率は同じなので，$X(7)=k$ となる確率と $X(7)=-k$ となる確率は等しい。

(i)　$|X(7)|=1$ のとき　正の向きに 4 回，負の向きに 3 回進むと $X(7)=1$ となることより，$|X(7)|=1$ の確率は ${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3\times2=\frac{35}{64}$ となる。

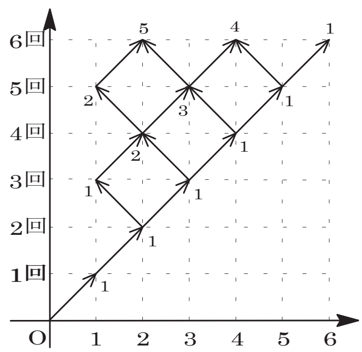
(ii)　$|X(7)|=3$ のとき　正の向きに 5 回，負の向きに 2 回進むと $X(7)=3$ となることより，$|X(7)|=3$ の確率は ${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2\times2=\frac{21}{64}$ となる。

(iii) $|X(7)|=5$ のとき　正の向きに 6 回，負の向きに 1 回進むと $X(7)=5$ となることより，$|X(7)|=5$ の確率は ${}_7\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{7}{64}$ となる。

(iv) $|X(7)|=7$ のとき　正の向きに 7 回進むと $X(7)=7$ となることより，$|X(7)|=7$ の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^7\times2=\frac{1}{64}$ となる。

(i)～(iv)より，$|X(7)|$ の期待値は，$1\times\frac{35}{64}+3\times\frac{21}{64}+5\times\frac{7}{64}+7\times\frac{1}{64}=\frac{35}{16}$ である。

(3)　1 回目が正の向きに進んだとき，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合について，横軸に P の座標，縦軸に移動回数，グラフの中の数字をその点に到達したときの条件を満たす場合の数とすると，右図のようになる。



すると，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合は，$5+4+1=10$ 通りある。

また，1 回目に負の向きに進んだときも同様となるので，求める確率は，$10\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\times2=\frac{5}{16}$ である。

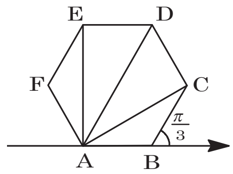
［解 説］

(3)は，上のようなグラフを書いて場合の数を数えると，もれや重複が防げます。

© 電送数学舎 2003

5

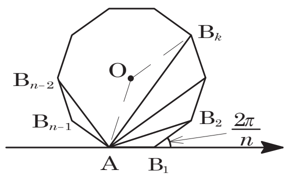
問題のページへ



(1)　まず，B を中心に A を$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転すると，$AB=1$より，点 A の軌跡の長さは$1\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$となる。次に，C を中心に A を$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転すると，$AC=1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\times 2=\sqrt{3}$より，点 A の軌跡の長さは$\sqrt{3}\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$となる。さらに，D を中心に A を$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転すると，$AD=2$より，点 A の軌跡の長さは$2\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$となる。

同様にして，E を中心に A を$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転すると点 A の軌跡の長さは$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$，F を中心に A を$\dfrac{\pi}{3}$だけ回転すると点 A の軌跡の長さは$\dfrac{\pi}{3}$となるので，

$$L(6)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}(2+\sqrt{3})\pi$$



(2)　$B=B_1$として，右図のように頂点を設定すると，求める軌跡の長さは，B_1，B_2，…，B_{n-1}を中心として，A を$\dfrac{2\pi}{n}$だけ回転したときできる弧の長さの和となる。

ここで，$1\leqq k\leqq n-1$のとき$\angle AOB_k=\dfrac{2k\pi}{n}$となるので，$\angle AOB_k\leqq\pi$のときは$AB_k=2\times 1\cdot\sin\dfrac{2k\pi}{2n}=2\sin\dfrac{k\pi}{n}$，$\angle AOB_k>\pi$のときは$AB_k=2\times 1\cdot\sin\dfrac{1}{2}\left(2\pi-\dfrac{2k\pi}{n}\right)=2\sin\dfrac{k\pi}{n}$となり，両者は一致するので，

$$L(n)=\sum_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{2\pi}{n}=4\pi\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)=4\pi\int_0^1\sin\pi x\,dx=4\pi\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=8$

[解 説]

大学入試の有名問題ですが，中学入試の有名問題でもあります。おうぎ形や長方形を転がしたとき，頂点の軌跡の長さを求める問題をよく見ます。

© 電送数学舎 2003