1

解答解説のページへ

正の実数 a に対し，$x = a + \dfrac{1}{a}$，$y = a - \dfrac{1}{a}$ とおく。このとき $x^8 - y^8$ が最小となる a の値と，その最小値を求めよ。

2　　解答解説のページへ

a を正の実数とし，関数 $F(x)=\int_{x}^{x+a}\left|\,|t|-1\,\right|dt$ を考える。

(1)　$F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに，$F'(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

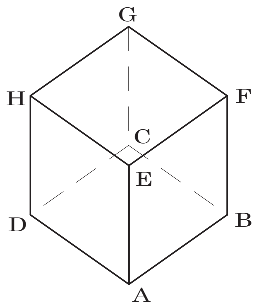
(2)　$0<a<2$ のとき，$F(x)$ の極大値および極小値と，それらを与える x の値を求めよ。

(3)　$a>2$ のとき，$F(x)$ の極小値と，それを与える x の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある。3 点 A, C, F を含む平面と直線 BH の交点を P, P から面 ABCD に下ろした垂線の足を Q とする。



(1)　長方形 DBFH を描き, 三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ。さらに, 線分 BP, PQ の長さを求めよ。

(2)　四面体 ABCF に内接する球の中心を O とする。点 O は線分 BP 上にあることを示せ。

(3)　四面体 ABCF に内接する球の半径を求めよ。

4

解答解説のページへ

　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ。

1

問題のページへ

$x = a + \dfrac{1}{a}$，$y = a - \dfrac{1}{a}$ より，$x + y = 2a$，$x - y = \dfrac{2}{a}$，$xy = a^2 - \dfrac{1}{a^2}$ となり，

$$x^2 - y^2 = 2a \cdot \frac{2}{a} = 4,\quad x^2 + y^2 = (2a)^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) = 2a^2 + \frac{2}{a^2}$$

さて，$x^8 - y^8 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$ なので，

$$x^4 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 = 4^2 + 2\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 = 2a^4 + \frac{2}{a^4} + 12$$

よって，$x^8 - y^8 = 4\left(2a^2 + \dfrac{2}{a^2}\right)\left(2a^4 + \dfrac{2}{a^4} + 12\right) = 16\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^4 + \dfrac{1}{a^4} + 6\right)$

$$= 16\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left\{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + 4\right\}$$

ここで，$t = a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ とおくと，$t \geqq 2\sqrt{a^2 \cdot \dfrac{1}{a^2}} = 2$ となり，等号は $a^2 = \dfrac{1}{a^2}$ すなわち $a^4 = 1$，$a > 0$ から $a = 1$ のときに成立する。

そこで，$f(t) = 16t(t^2 + 4) = 16(t^3 + 4t)$ とおくと，$f'(t) = 16(3t^2 + 4) > 0$ なので，

$$f(t) \geqq f(2) = 256 \quad (t \geqq 2)$$

以上より，$x^8 - y^8$ は $a = 1$ のとき最小値 256 をとる。

［解 説］

$a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ を 1 つの文字として置き換えればよいことは，計算を進めていくうちにわかってきます。そうすると，相加平均・相乗平均の出番です。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\left|\,|x|-1\,\right|$とおき，$f(-x)=f(x)$に注意して場合分けをすると，

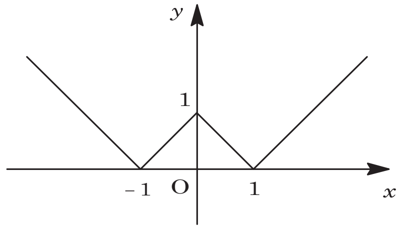
(i)　$x\leqq -1$のとき　$f(x)=-x-1$

(ii)　$-1\leqq x\leqq 0$のとき　$f(x)=x+1$

(iii)　$0\leqq x\leqq 1$のとき　$f(x)=-x+1$

(iv)　$x\geqq 1$のとき　$f(x)=x-1$

よって，$y=f(x)$のグラフは右図のようになる。



$$F(x)=\int_x^{x+a}\left|\,|t|-1\,\right|dt=\int_x^{x+a}f(t)\,dt$$ より，

$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=\left|\,|x+a|-1\,\right|-\left|\,|x|-1\,\right|$$

また，$F'(x)=0$とおくと，$f(x+a)=f(a)$となり，$y=f(x+a)$のグラフは$y=f(x)$のグラフをx軸方向に$-a$だけ平行移動すると得られるので，

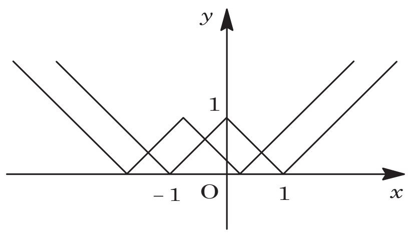
(i)　$0<a<2$のとき

$F'(x)=0$となるxは，右図の2つのグラフの交点より，

$$-x+1=(x+a)-1,\ \ x=\frac{-a+2}{2}$$

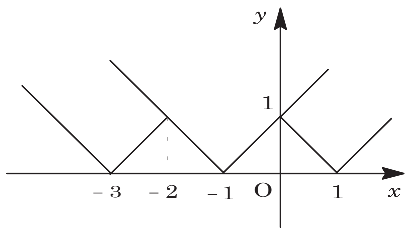
$$x+1=-(x+a)+1,\ \ x=-\frac{a}{2}$$

$$-x-1=(x+a)+1,\ \ x=-\frac{a+2}{2}$$



(ii)　$a=2$のとき

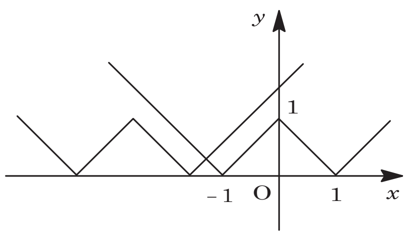
$F'(x)=0$となるxは，右図の2つのグラフの共有点より，$-2\leqq x\leqq 0$を満たすすべての実数である。



(iii)　$a>2$のとき

$F'(x)=0$となるxは，右図2つのグラフの交点より，

$$-x-1=(x+a)-1,\ \ x=-\frac{a}{2}$$

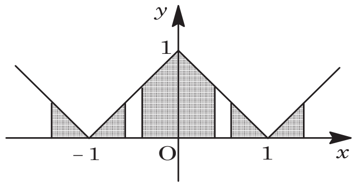


(2)　$0<a<2$ のとき，(1)より$F(x)$の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{a+2}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$\frac{-a+2}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘		↗		↘		↗

すると，$x=-\frac{a}{2}$のとき

極大値をとり，$x=-\dfrac{a+2}{2}$，$\dfrac{-a+2}{2}$ のとき極小値をとる。



極大値と極小値は，右図において，$y=f(x)$ のグラフと x 軸にはさまれた網点部の面積を計算することから，

$$F\left(-\frac{a+2}{2}\right)=\int_{-\frac{a+2}{2}}^{\frac{a-2}{2}} f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times 2=\frac{a^2}{4}$$

$$F\left(-\frac{a}{2}\right)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt=\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)^2\right\}\times 2=a-\frac{a^2}{4}$$

$$F\left(\frac{-a+2}{2}\right)=\int_{\frac{-a+2}{2}}^{\frac{a+2}{2}} f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times 2=\frac{a^2}{4}$$

よって，極大値 $a-\dfrac{a^2}{4}$ $\left(x=-\dfrac{a}{2}\right)$，極小値 $\dfrac{a^2}{4}$ $\left(x=-\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{-a+2}{2}\right)$ である。

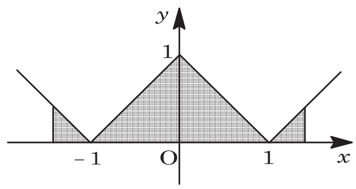
(3)　$a>2$ のとき，(1)より，$F(x)$ の増減は右表のようになり，$x=-\dfrac{a}{2}$ のとき極小値をとる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{a}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

(2)と同様に，極小値は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸にはさまれた網点部の面積を計算することから，

$$F\left(-\frac{a}{2}\right)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)\,dt$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)^2\right\}\times 2=\frac{a^2}{4}-a+2$$



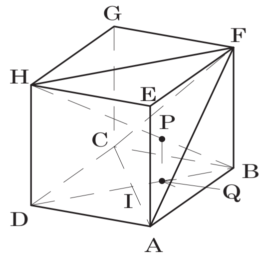
よって，極小値 $\dfrac{a^2}{4}-a+2$ $\left(x=-\dfrac{a}{2}\right)$ である。

［解 説］

時間のかかる繁雑な問題です。しかし，方針決定に迷うような難問ではありません。積分も，三角形の面積を対応させればよいわけですし。

3

問題のページへ



(1)　長方形 DBFH は，$HD=FB=1$，$HF=DB=\sqrt{2}$ であり，正方形 ABCD の対角線の交点を I とおくと，長方形 DBFH と三角形 ACF の交線は FI となる。

さて，$\triangle HPF \backsim \triangle BPI$ より，

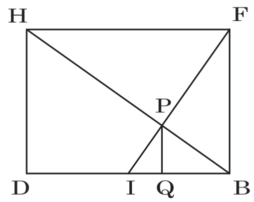
$$BP:HP=BI:HF=1:2$$

よって，$BP=\dfrac{1}{3}BH=\dfrac{1}{3}\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

また，$\triangle BPQ \backsim \triangle BHD$ より，

$$PQ:HD=BP:BH=1:3$$

よって，$PQ=\dfrac{1}{3}HD=\dfrac{1}{3}$



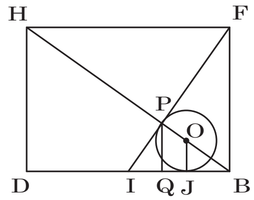
(2)　点 I は AC の中点で，$FP:PI=2:1$ より，P は正三角形 AFC の重心である。

すると，四面体 ABCF は $BA=BC=BF=1$ であるので，対称性から，内接球の中心 O は線分 BP 上にある。

(3)　点 O から正方形 ABCD に下ろした垂線の足を J とし，内接球の半径を r とすると，$BO:BP=OJ:PQ$ より，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-r\right):\frac{\sqrt{3}}{3}=r:\frac{1}{3},\quad \sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}}{3}-r$$

よって，$r=\dfrac{\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$



［解 説］

(2)は(3)の誘導ですので，簡単に記述しました。直観的すぎるかもしれません。

4

問題のページへ

(1)　部屋を移動する確率は$\frac{1}{3}$，移動しない確率は$\frac{2}{3}$である。

まず，条件より，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$なので，

$$P_A(1)=\frac{2}{3}P_A(0)+\frac{1}{3}P_B(0)=\frac{2}{3},\ P_B(1)=\frac{1}{3}P_A(0)+\frac{2}{3}P_B(0)=\frac{1}{3}$$

$$P_A(2)=\frac{2}{3}P_A(1)+\frac{1}{3}P_B(1)=\frac{5}{9},\ P_B(2)=\frac{1}{3}P_A(1)+\frac{2}{3}P_B(1)=\frac{4}{9}$$

$$P_A(3)=\frac{2}{3}P_A(2)+\frac{1}{3}P_B(2)=\frac{14}{27},\ P_B(3)=\frac{1}{3}P_A(2)+\frac{2}{3}P_B(2)=\frac{13}{27}$$

また，第 3 試行の結果，持ち点は，4，2，0，-2の場合がある。

(i)　持ち点が 4 の場合　部屋が AAAA となるときで，その確率は$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

(ii)　持ち点が 2 の場合　部屋を AAAB, AABA, ABAA と移るときで，その確率は，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

(iii) 持ち点が 0 の場合　部屋を AABB, ABAB, ABBA と移るときで，その確率は，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{27}$$

(iv) 持ち点が-2の場合　部屋を ABBB と移るときで，その確率は$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$

よって，持ち点の期待値$E(3)$は，

$$E(3)=4\times\frac{8}{27}+2\times\frac{8}{27}+0\times\frac{7}{27}+(-2)\times\frac{4}{27}=\frac{40}{27}$$

(2)　(1)と同様にして，

$$P_A(n+1)=\frac{2}{3}P_A(n)+\frac{1}{3}P_B(n),\ P_B(n+1)=\frac{1}{3}P_A(n)+\frac{2}{3}P_B(n)$$

(3)　(2)より，$P_A(n+1)+P_B(n+1)=P_A(n)+P_B(n)$となり，

$$P_A(n)+P_B(n)=P_A(0)+P_B(0)=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$P_A(n+1)-P_B(n+1)=\frac{1}{3}\{P_A(n)-P_B(n)\}$より，

$$P_A(n)-P_B(n)=\{P_A(0)-P_B(0)\}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$P_A(n)=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$，$P_B(n)=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

［解 説］

(1)の$E(3)$を求める設問が，この問題の中では宙に浮いた状態で，奇妙な感じがしていました。ところが，理系では，$E(n)$を求める設問が(4)として加わっており，この疑問は氷解しました。