1

解答解説のページへ

次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1,\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。ただし，i は虚数単位である。

(1)　z_2，z_3 を求めよ。

(2)　上の漸化式を $z_{n+1} - \alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ。

(3)　一般項 z_n を求めよ。

(4)　$z_n = -\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

A を 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (ただし，$bc \neq 0$)，k を実数とする。行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ について等式 $XA-AX=kA$ ……(∗)を考える。ただし，行列の成分は，すべて実数とする。

(1)　$k=0$ のとき，(∗)を満たす X は A の実数倍であることを示せ。

(2)　$k \neq 0$ のとき，(∗)を満たす X が存在するための必要十分条件は $A^2=O$ (ただし，O は零行列)であることを示せ。このとき，(∗)を満たす X で $z=c$ であるものを求めよ。

3

解答解説のページへ

a を 1 以上の実数, b を正の実数とする。

(1) 0 以上のすべての実数 x について, 不等式 $e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つための, a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし, e は自然対数の底とする。

(2) a, b が(1)で求めた範囲を動くとき, 定積分 $\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+2b}\,dx$ の値を最小にする a, b と, その最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

a, b を正の実数とする。空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ a,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を l とする。直線 l を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1) x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めよ。

(2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3) 図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

ある人がサイコロを振る試行によって, 部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果, 部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え, 部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果, 部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$, $P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり, $P_A(0)=1$, $P_B(0)=0$ とする), 持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$, $P_A(2)$, $P_A(3)$ および $P_B(1)$, $P_B(2)$, $P_B(3)$ を求めよ。また, 第 3 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$, $P_B(n+1)$ を $P_A(n)$, $P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$, $P_B(n)$ を n を用いて表せ。

(4)　第 n 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 条件より，$z_1=1$，$z_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n+1$ ………①

$$z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_1+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot 1+1=\frac{3+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_2+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{2}+1=1+\sqrt{3}i$$

(2) ①を変形して，$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}(z_n-\alpha)$ となることより，

$$z_{n+1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha+\alpha$$

よって，$-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha+\alpha=1$，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha=1$から，$\alpha=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(3) (2)より，$z_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(z_n-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$$z_n-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\left(z_1-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$z_n=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(4) $z_n=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ より，

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=-1,\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

②より，$\cos\dfrac{n-1}{3}\pi+i\sin\dfrac{n-1}{3}\pi=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$$\frac{n-1}{3}\pi=2k\pi+\frac{4\pi}{3},\ n-1=6k+4,\ n=6k+5$$

なお, $n\geqq 1$ より $k\geqq 0$ となるので，$n=6k+5$ ($k=0$，1，2，…) である。

[解 説]

虚数係数の漸化式です。詳しすぎるほどの誘導がついています。

2

問題のページへ

(1)　$XA-AX=kA$ より，$\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$(ax+cy)-(ax+bz)=ka$ ………①，$(bx-ay)-(ay-bx)=kb$ ………②

$(az-cx)-(cx-az)=kc$ ………③，$(bz+ax)-(cy+ax)=-ka$ ………④

①より $cy-bz=ka$ ……⑤となり，④と一致する。

②より $2bx-2ay=kb$ ……⑥，③より $2az-2cx=kc$ ……⑦

さて，$k=0$ のとき，⑤より $cy=bz$，⑥より $bx=ay$ となり，$b\neq 0$ より，

$z=\dfrac{c}{b}y$，$x=\dfrac{a}{b}y$

⑦は $az=cx$ となるが，$a\cdot\dfrac{c}{b}y=c\cdot\dfrac{a}{b}y$ より満たされているので，

$$X=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{b}y & y \\ \dfrac{c}{b}y & -\dfrac{a}{b}y \end{pmatrix}=\dfrac{y}{b}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}=\dfrac{y}{b}A$$

(2)　⑤より $z=\dfrac{-ka+cy}{b}$ ……⑧，⑥より $x=\dfrac{kb+2ay}{2b}$ ……⑨

⑧⑨を⑦に代入すると，$2a\cdot\dfrac{-ka+cy}{b}-2c\cdot\dfrac{kb+2ay}{2b}=kc$，$-2ka^2-2kbc=0$

$k\neq 0$ より，$-a^2-bc=0$ ………⑩

ここで, E を単位行列として，ハミルトン・ケーリーの定理を用いると，

$A^2-(a-a)A+(-a^2-bc)E=O$ ………⑪

よって，⑩から $A^2=O$ となる。

逆に，$A^2=O$ のとき，⑪より⑩が成立する。このとき，⑤～⑦を満たす x, y, z,すなわち $XA-AX=kA$ を満たす X が存在する。

さて，$z=c\neq 0$ のとき，⑤より $cy-bc=ka$，$y=\dfrac{bc+ka}{c}=\dfrac{ka-a^2}{c}$　（⑩より）

⑥より，$x=\dfrac{kb+2ay}{2b}=\dfrac{kb+2a\cdot\dfrac{ka-a^2}{c}}{2b}=\dfrac{kbc+2ka^2-2a^3}{2bc}$

$=\dfrac{-ka^2+2ka^2-2a^3}{-2a^2}=\dfrac{-k+2a}{2}$　（⑩より）

よって，$X=\begin{pmatrix} \dfrac{-k+2a}{2} & \dfrac{ka-a^2}{c} \\ c & \dfrac{k-2a}{2} \end{pmatrix}$

［解 説］

行列の成分計算を慎重に行うことに尽きます。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x-a(x+2b)$ とおくと，$f'(x)=e^x-a$

$a\geqq 1$ より，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

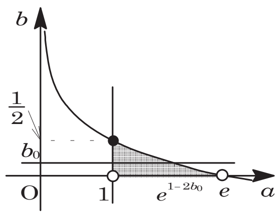
よって，$f(x)\geqq 0$ の条件は，$f(\log a)\geqq 0$

$$e^{\log a}-a(\log a+2b)\geqq 0,\quad a-a(\log a+2b)\geqq 0$$

$a>0$ なので，$\log a+2b\leqq 1$

(2)　(1)より, a, b の条件は, $a\geqq 1$, $b>0$，$\log a+2b\leqq 1$ から，

$$a\geqq 1,\quad 0<b\leqq\frac{1}{2}(1-\log a)$$



さて，$I=\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+2b}dx=\frac{1}{ae^b}\Big[\log|x+2b|\Big]_0^1$

$$=\frac{1}{ae^b}\{\log(1+2b)-\log 2b\}=\frac{1}{ae^b}\log\frac{1+2b}{2b}$$

まず, b の値を固定して，$b=b_0\left(0<b_0\leqq\dfrac{1}{2}\right)$とする。

$$I=\frac{1}{ae^{b_0}}\log\frac{1+2b_0}{2b_0}$$

$b=b_0$ と $b=\dfrac{1}{2}(1-\log a)$ のグラフの交点は,

$$b_0=\frac{1}{2}(1-\log a),\quad \log a=1-2b_0,\quad a=e^{1-2b_0}$$

これより, a の値を $1\leqq a\leqq e^{1-2b_0}$ で変化させて, I の最小値を求める。

すると，$\dfrac{1}{e^{b_0}}\log\dfrac{1+2b_0}{2b_0}>0$ から，a の値が増加すると，I の値は単調減少することにより，$a=e^{1-2b_0}$ で I の値は最小となる。

このとき，$I=\dfrac{1}{e^{1-2b_0}e^{b_0}}\log\dfrac{1+2b_0}{2b_0}=e^{b_0-1}\log\dfrac{1+2b_0}{2b_0}$ ………(＊)

次に，b_0 を $0<b_0\leqq\dfrac{1}{2}$ で変化させて, I の最小値を求める。

ここで, (＊)より，$g(x)=e^{x-1}\log\dfrac{1+2x}{2x}$ $\left(0<x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$とおくと,

$$g'(x)=e^{x-1}\log\frac{1+2x}{2x}+e^{x-1}\left(\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{2x}\right)=e^{x-1}\left\{\log\frac{1+2x}{2x}-\frac{1}{x(1+2x)}\right\}$$

さらに，$h(x)=\log\dfrac{1+2x}{2x}-\dfrac{1}{x(1+2x)}$ とおくと,

$$h'(x)=\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{2x}+\frac{1+4x}{x^2(1+2x)^2}=\frac{-2x^2+3x+1}{x^2(1+2x)^2}$$

$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ において，$-2x^2+3x+1=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}>0$ から，$h'(x)>0$ となり，$h(x)$ は単調に増加する。

ここで，$h\left(\frac{1}{2}\right)=\log 2-1=\log 2-\log e<0$ より，$0<x\leqq\frac{1}{2}$ において，

$$h(x)<0,\ \ g'(x)=e^{x-1}h(x)<0$$

よって，$g(x)$ は単調に減少し，$x=\frac{1}{2}$ で最小値をとる。

以上より, I は $b=\frac{1}{2}$，$a=e^0=1$ のとき最小となり，最小値は,

$$I=\frac{1}{1\times e^{\frac{1}{2}}}\log\frac{1+1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\log 2$$

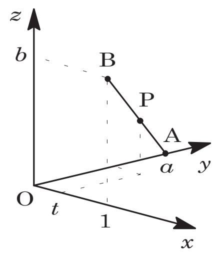
［解 説］

不等式で条件づけられた 2 変数関数の最大・最小問題です。グラフでの処理がストレートに行えないので，まず 1 文字の値を固定して最小値を求め，次にこの状態を保ったまま，いったん固定した文字の値を変化させるという 2 ステップで最小値を求めます。なお，(1)の不等式を，$\frac{1}{ae^b(x+2b)}\geqq e^{-x-b}$ と変形し，この両辺を 0 から 1 まで積分しても，題意とは無関係なことに注意してください。

$\boxed{4}$

問題のページへ

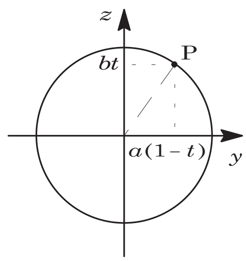
(1)　$\mathrm{A}(0,\ a,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ b)$ を通る直線 l 上で，$x=t$ である点 P は，線分 AB を $t:1-t$ に内分する点であるので，



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(1-t)(0,\ a,\ 0)+t(1,\ 0,\ b)$$

よって，$\mathrm{P}\big(t,\ a(1-t),\ bt\big)$ となる。

(2)　図形 M を平面 $x=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切断した切り口は，点 P を x 軸のまわりに 1 回転して得られる円なので，



$$y^2+z^2=a^2(1-t)^2+b^2t^2,\ x=t$$

よって，図形 M の方程式は，

$$y^2+z^2=a^2(1-x)^2+b^2x^2$$

xy 平面との交線は，$z=0$ を代入して，

$$y^2=a^2(1-x)^2+b^2x^2,\ z=0$$

(3)　平面 $x=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で M を切断した断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi\{a^2(1-t)^2+b^2t^2\}$$

すると，図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積 V は，

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^1 \pi\{a^2(1-t)^2+b^2t^2\}dt=\pi\Big[-\frac{a^2}{3}(1-t)^3+\frac{b^2}{3}t^3\Big]_0^1$$
$$=\pi\Big(\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}\Big)=\frac{\pi}{3}(a^2+b^2)$$

［解 説］

昨年の微分方程式に続き，今年も，普通に解くと範囲外としか思えない「代幾・基解」の頻出問題が出ました。北大も京大と同じように，範囲外も出題すると宣言した方がスッキリすると思いますが。

5

問題のページへ

(1)　部屋を移動する確率は$\dfrac{1}{3}$，移動しない確率は$\dfrac{2}{3}$である。

まず，条件より，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$なので，

$$P_A(1)=\frac{2}{3}P_A(0)+\frac{1}{3}P_B(0)=\frac{2}{3},\quad P_B(1)=\frac{1}{3}P_A(0)+\frac{2}{3}P_B(0)=\frac{1}{3}$$

$$P_A(2)=\frac{2}{3}P_A(1)+\frac{1}{3}P_B(1)=\frac{5}{9},\quad P_B(2)=\frac{1}{3}P_A(1)+\frac{2}{3}P_B(1)=\frac{4}{9}$$

$$P_A(3)=\frac{2}{3}P_A(2)+\frac{1}{3}P_B(2)=\frac{14}{27},\quad P_B(3)=\frac{1}{3}P_A(2)+\frac{2}{3}P_B(2)=\frac{13}{27}$$

すると，第3試行の結果，持ち点の期待値$E(3)$は，

$$E(3)=1+\left(1\times\frac{2}{3}-1\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{5}{9}-1\times\frac{4}{9}\right)+\left(1\times\frac{14}{27}-1\times\frac{13}{27}\right)=\frac{40}{27}$$

(2)　(1)と同様にして，

$$P_A(n+1)=\frac{2}{3}P_A(n)+\frac{1}{3}P_B(n),\quad P_B(n+1)=\frac{1}{3}P_A(n)+\frac{2}{3}P_B(n)$$

(3)　(2)より，$P_A(n+1)+P_B(n+1)=P_A(n)+P_B(n)$となり，

$$P_A(n)+P_B(n)=P_A(0)+P_B(0)=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$P_A(n+1)-P_B(n+1)=\dfrac{1}{3}\{P_A(n)-P_B(n)\}$より，

$$P_A(n)-P_B(n)=\{P_A(0)-P_B(0)\}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$P_A(n)=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$，$P_B(n)=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

(4)　k回目の試行の後，持ち点の期待値は，

$$1\times\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}-1\times\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

よって，第n試行の結果，持ち点の期待値$E(n)$は，

$$E(n)=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$$

［解　説］

文系では(3)までの出題でしたが，理系では(4)が追加されています。ところが，定義だけで$E(n)$を求めるのは困難で，そのため「和の期待値は期待値の和」という考え方を利用しました。その結果，(1)の$E(3)$も解き直し，文系とは解法が異なっています。しかし，これも数学Bの範囲外の領域にあるのですが。