1　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　x についての 2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k (x^2-2kx-3k^2+1)\,dx$ の最小値と最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

2 次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。すべての自然数 n に対して，

$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に赤, 青, 黄, 緑の 4 色の球が 1 個ずつ合計 4 個入っている。袋から球を 1 個取り出してその色を記録し袋に戻す試行を, くり返し 4 回行う。こうして記録された相異なる色の数を X とし, X の値が k である確率を P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とする。

(1) 確率 P_3 と P_4 を求めよ。

(2) X の期待値 E を求めよ。

4

解答解説のページへ

半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。

1

問題のページへ

(1)　2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつことから,

$$D/4=k^2-(-3k^2+1)=4k^2-1<0$$

よって, $(2k-1)(2k+1)<0$ から, $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

(2)　$F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-kx^2-3k^2x+x\right]_0^k=-\frac{11}{3}k^3+k$ より,

$$F'(k)=-11k^2+1$$

$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ における $F(k)$ の増減は右表のようになり, 最小値は $-\frac{2}{33}\sqrt{11}$ $\left(x=-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, 最大値は $\frac{2}{33}\sqrt{11}$ $\left(x=\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ である。

k	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$F'(k)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(k)$	$-\frac{1}{24}$	$\searrow$	$-\frac{2}{33}\sqrt{11}$	$\nearrow$	$\frac{2}{33}\sqrt{11}$	$\searrow$	$\frac{1}{24}$

［解　説］

ミスが致命傷の計算問題です。

2

問題のページへ

$f(x)=x^2+ax+b$ のとき，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ より，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k^2+ak+b)=\frac{1}{3}(n^2+an+b)$$

これより，$\dfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)+\dfrac{1}{2}a(n+1)+b=\dfrac{1}{3}(n^2+an+b)$ となり，

$$(a+3)n+(3a+4b+1)=0$$

すべての自然数 n に対して成立することより，

$$a+3=0,\ 3a+4b+1=0$$

よって，$a=-3$，$b=2$ から，$f(x)=x^2-3x+2$

［解 説］

数列の和の公式を確認するための問題です。

3

問題のページへ

(1)　$X=3$ となる場合は，3 色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り，その中で 2 回取り出す球の選び方が 3 通りずつ，そして取り出す順序が $\dfrac{4!}{2!}=12$ 通りより，その確率 P_3 は，

$$P_3=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times3\times12}{4^4}=\frac{9}{16}$$

また，$X=4$ となる場合は，各色の球を 1 回ずつ取り出し，その取り出す順序が $4!$ 通りより，その確率 P_4 は，

$$P_4=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}$$

(2)　$X=1$ となる場合は，1 色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りより，その確率 P_1 は，

$$P_1=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{4^4}=\frac{1}{64}$$

また，$X=2$ となる確率 P_2 は，

$$P_2=1-(P_1+P_3+P_4)=\frac{21}{64}$$

以上より，X の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{1}{64}+2\times\frac{21}{64}+3\times\frac{9}{16}+4\times\frac{3}{32}=\frac{175}{64}$$

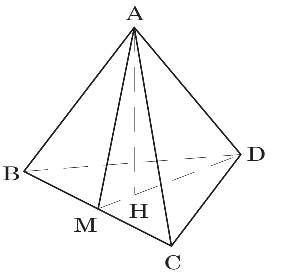
［解 説］

場合分けが必要で，いちばん求めにくい P_2 は，余事象の確率として計算しました。

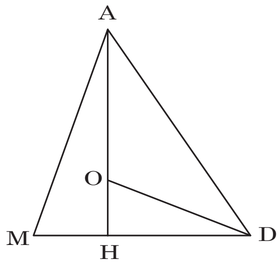
4

問題のページへ

半径 1 の球に内接する正四面体 ABCD において，点 A から面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，対称性から H は△BCD の重心となり，また球の中心 O は線分 AH 上にある。



さて，辺 BC の中点を M とし，3 点 A, M, D を含む平面で，正四面体 ABCD を切断したとき，その切り口は右図のようになる。



ここで，正四面体の 1 辺の長さを x とすると，

$$AD = x\,,\ \ AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

MH : HD = 1 : 2 より，$\cos\angle AMH = \dfrac{1}{3}$ となり，

$$AH = AM\sin\angle AMH = \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

また，$HD = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ なので，△OHD に三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 1\,,\ \ x^2-\frac{2}{3}\sqrt{6}\,x = 0$$

$x>0$ より，$x = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ となる。

［解 説］

参考書などの例題に，そっくりそのまま載っている有名問題です。