1　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $e^{2a}-2e^{a}-1=0$ を満たす実数 a を求めよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(2)　$t \geqq 0$ に対して $F(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^x+e^{2t}}\,dx$ を求めよ。

(3)　$t \geqq 0$ の範囲での $F(t)$ の最大値と，最大値を与える t の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$x,\ y$ は$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$を満たすとする。数列$\{a_n\}$および$\{b_n\}$を次で定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \cos y & \sin x - \sin y \\ -\sin x + \sin y & \cos x + \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1)　$c_n = {a_n}^2 + {b_n}^2\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$を求めよ。

(2)　(1)のc_nに対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$となるような$(x,\ y)$の範囲を図示せよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$f(x)$は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1)　自然数 $n,\ m$ に対し，$\displaystyle\int_0^n t^m\,dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m\,dt$ を示せ。

(2)　$f(x)$の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{r+1}$$

(3)　すべての自然数 n に対して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

複素数a_n ($n=1,\ 2,\ \cdots$)を次のように定める。

$$a_1=1+i,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，iは虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上の3点0，a_1，a_2を通る円の方程式を求めよ。

(2)　すべてのa_nは(1)で求めた円上にあることを示せ。

5

解答解説のページへ

半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。

1

解答解説のページへ

(1) $e^{2a}-2e^{a}-1=0$から，$e^{a}>0$なので，$e^{a}=1+\sqrt{2}$

よって，$a=\log(1+\sqrt{2})$

(2) $F(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^x+e^{2t}}dx=\Big[\log(e^x+e^{2t})\Big]_0^t=\log(e^t+e^{2t})-\log(1+e^{2t})=\log\frac{e^t+e^{2t}}{1+e^{2t}}$

(3) $f(t)=\frac{e^t+e^{2t}}{1+e^{2t}}$とおくと，$F(t)=\log f(t)$となり，

$$f'(t)=\frac{(e^t+2e^{2t})(1+e^{2t})-(e^t+e^{2t})\cdot 2e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}$$

$$=\frac{-e^{3t}+2e^{2t}+e^t}{(1+e^{2t})^2}$$

$$=-\frac{e^t(e^{2t}-2e^t+1)}{(1+e^{2t})^2}$$

t	0	$\cdots$	$\log(1+\sqrt{2})$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

(1)より，$f'(t)=0$となるのは$t=\log(1+\sqrt{2})$から，$f(t)$の最大値は，

$$f(\log(1+\sqrt{2}))=\frac{(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})^2}{1+(1+\sqrt{2})^2}=\frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$F(t)$の最大値は$\log\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ $\left(t=\log(1+\sqrt{2})\right)$である。

[解 説]

(3)において，$f'(t)=0$の解を求める際に, (1)の結果が役立ちます。

2

解答解説のページへ

(1) 条件より，$a_{n+1}=(\cos x+\cos y)a_n+(\sin x-\sin y)b_n$

$b_{n+1}=(-\sin x+\sin y)a_n+(\cos x+\cos y)b_n$

ここで，$u=\cos x+\cos y$，$v=\sin x-\sin y$ とおくと，

$a_{n+1}=ua_n+vb_n$，$b_{n+1}=-va_n+ub_n$

すると，$a_{n+1}{}^2+b_{n+1}{}^2=(ua_n+vb_n)^2+(-va_n+ub_n)^2$

$=(u^2+v^2)a_n{}^2+(u^2+v^2)b_n{}^2$

$=(u^2+v^2)(a_n{}^2+b_n{}^2)$ ………①

$u^2+v^2=(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2$

$=2+2(\cos x\cos y-\sin x\sin y)=2\{1+\cos(x+y)\}$ ………②

①②より，$c_{n+1}=2\{1+\cos(x+y)\}c_n$

よって，$c_1=a_1{}^2+b_1{}^2=1$ から，

$c_n=c_1\cdot 2^{n-1}\{1+\cos(x+y)\}^{n-1}=2^{n-1}\{1+\cos(x+y)\}^{n-1}$

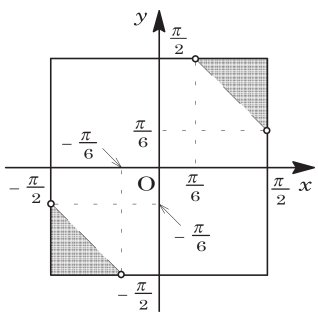
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=0$ となる必要十分条件は, (1)より,

$-1<2\{1+\cos(x+y)\}<1$，$-\dfrac{3}{2}<\cos(x+y)<-\dfrac{1}{2}$ ………(＊)

ここで，条件から $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので，$-\pi\leqq x+y\leqq\pi$ となり, (＊)から,

$-\pi\leqq x+y<-\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{2}{3}\pi<x+y\leqq\pi$

よって，これらの不等式を満たす点$(x,\ y)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解 説］

問題文は行列で設定されていますが，解くうえで必要なのは，数列の知識です。

3

解答解説のページへ

(1) 実数 t に対して $t \leqq k \leqq t+1$ となる自然数 k をとると，$t^m \leqq k^m \leqq (t+1)^m$ から，

$$\int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq \int_{k-1}^{k} k^m dt \leqq \int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt,\ \int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq k^m \leqq \int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt$$

k を 1 から n まで変化させて和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt$$

よって，$\int_0^n t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m dt$

(2) (1)より，$\dfrac{n^{m+1}}{m+1} \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \dfrac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} < \dfrac{(n+1)^{m+1}}{m+1}$ ………①

ここで，$f(x)$ を r 次の整式とすると，$f(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} k^r + a_{r-1}\sum_{k=1}^{n} k^{r-1} + \cdots + a_1 \sum_{k=1}^{n} k + a_0 n$$

①より，$\dfrac{n^{r+1}}{r+1} + a_{r-1}\dfrac{n^r}{r} + \cdots + a_1 \dfrac{n^2}{2} + a_0 n \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$\frac{1}{r+1} + a_{r-1}\frac{1}{rn} + \cdots + a_1 \frac{1}{2n^{r-1}} + a_0 \frac{1}{n^r} \leqq \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

①より，$\sum_{k=1}^{n} f(k) < \dfrac{(n+1)^{r+1}}{r+1} + a_{r-1}\dfrac{(n+1)^r}{r} + \cdots + a_1 \dfrac{(n+1)^2}{2} + a_0 n$

$$\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) < \frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r+1} + \frac{a_{r-1}}{rn}\left(1+\frac{1}{n}\right)^r + \cdots + \frac{a_1}{2n^{r-1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{a_0}{n^r}$$

以上より，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \dfrac{1}{r+1}$ ………②

(3) 条件より，$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \dfrac{1}{2} f(n)$ ……③なので，$\dfrac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f(n)}{n^r}$

$n\to\infty$ とすると，$f(n)$ の r 次の係数は 1 なので，②より，$\dfrac{1}{r+1} = \dfrac{1}{2}\times 1$

すると，$r=1$ から $f(x) = x + a$ とおくことができ，③より，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k+a) = \frac{1}{2}(n+a),\ \frac{1}{2}(n+1) + a = \frac{1}{2}(n+a)$$

よって，$a = -1$ となるので，$f(x) = x - 1$

［解 説］

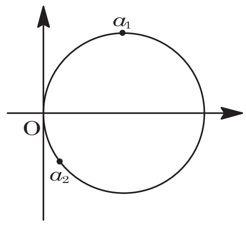
(3)では，(2)の結論の利用方法がポイントです。この誘導を明確に示す記述力が問われています。

4

解答解説のページへ

(1)　$a_1=1+i$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n-3}$ ……①より，

$$a_2=\frac{a_1}{2a_1-3}=\frac{1+i}{2(1+i)-3}=\frac{1+i}{-1+2i}=\frac{1-3i}{5}$$



3 点0，a_1，a_2を通る円の中心を$p+qi$とおくと，

$$p^2+q^2=(p-1)^2+(q-1)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$p^2+q^2=\left(p-\frac{1}{5}\right)^2+\left(q+\frac{3}{5}\right)^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より $p+q-1=0$，③より $-p+3q+1=0$

よって，$p=1$，$q=0$から，円の中心は点 1 となるので，円周上の任意の点を z とすると，3 点0，a_1，a_2を通る円の方程式は，

$$|z-1|=1$$

(2)　$a_1\neq 0$なので，①から帰納的に$a_n\neq 0$となり，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n-3}{a_n}=-\frac{3}{a_n}+2$$

変形すると，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{2}=-3\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2}\right)(-3)^{n-1}=\left(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{2}\right)(-3)^{n-1}=-\frac{i}{2}(-3)^{n-1}$$

よって，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}(-3)^{n-1}$から，$a_n=\dfrac{2}{1-(-3)^{n-1}i}$となり，

$$|a_n-1|=\left|\frac{2}{1-(-3)^{n-1}i}-1\right|=\left|\frac{2-1+(-3)^{n-1}i}{1-(-3)^{n-1}i}\right|=\left|\frac{1+(-3)^{n-1}i}{1-(-3)^{n-1}i}\right|$$

$$=\frac{\left|1+(-3)^{n-1}i\right|}{\left|1-(-3)^{n-1}i\right|}=\frac{\sqrt{1+9^{n-1}}}{\sqrt{1+9^{n-1}}}=1$$

したがって，すべてのa_nは円$|z-1|=1$上にある。

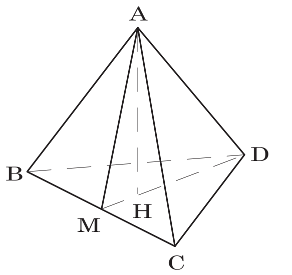
［解 説］

有名なタイプの漸化式で，a_nを求めることは容易です。そのため，数学的帰納法の出番はありませんでした。

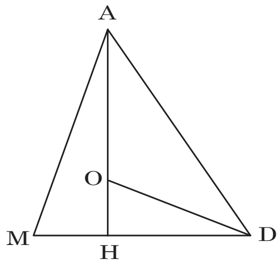
$\boxed{5}$

解答解説のページへ

半径 1 の球に内接する正四面体 ABCD において，点 A から面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，対称性から H は△BCD の重心となり，また球の中心 O は線分 AH 上にある。



さて，辺 BC の中点を M とし，3 点 A, M, D を含む平面で，正四面体 ABCD を切断したとき，その切り口は右図のようになる。



ここで，正四面体の 1 辺の長さを x とすると，

$$AD = x\ ,\ \ AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$MH : HD = 1 : 2$ より，$\cos\angle AMH = \dfrac{1}{3}$ となり，

$$AH = AM\sin\angle AMH = \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

また，$HD = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ なので，△OHD に三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 1\ ,\ \ x^2-\frac{2}{3}\sqrt{6}\,x = 0$$

$x>0$ より，$x = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ となる。

［解 説］

参考書などの例題に，そっくりそのまま載っている有名問題です。