1　　解答解説のページへ

b は実数とし，c は 0 でない実数とする。2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解を α，β とおく。

(1)　α，β はともに 0 でないことを示せ。

(2)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数 r に等しいとき，b^2 を c と r を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-\sin 3t,\ \cos 3t,\ -1)$$

によって与えられている。ただし，$-180^\circ \leqq t \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①を考える。

(1) 関数 $f(x)=4x^3-12x^2+9x$ の極値を求めて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 方程式①の実数解の中で，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つであるための p の条件を求めよ。

4

解答解説のページへ

1つのさいころを投げ続けて，同じ目が2回連続して出たら終了するものとする。

(1)　ちょうど3回目に終了する確率を求めよ。

(2)　3回目以内（3回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(3)　ちょうどr回目に終了する確率を求めよ。ただし$r \geqq 2$とする。

1

問題のページへ

(1)　2次方程式 $x^2+bx+c=0$ に対し，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-b \cdots\cdots\text{①},\quad \alpha\beta=c \cdots\cdots\text{②}$$

$c\neq 0$ なので，②から α，β はともに 0 ではない。

(2)　(i)　$\dfrac{\alpha}{\beta}=r$ のとき

$\alpha=\beta r$ より，①，②に代入して，

$$\beta(r+1)=-b \cdots\cdots\text{③},\quad \beta^2 r=c \cdots\cdots\text{④}$$

$r\neq -1$ のとき，③より $\beta=\dfrac{-b}{r+1}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{b^2}{(r+1)^2}r=c,\quad b^2=\frac{(r+1)^2}{r}c \cdots\cdots\text{⑤}$$

$r=-1$ のとき，③より $b=0$ となるが，この場合は⑤に含まれる。

(ii)　$\dfrac{\beta}{\alpha}=r$ のとき

(i)と同様にすると，α，β に関する対称性より，⑤を導くことができる。

(i)(ii)より，$b^2=\dfrac{(r+1)^2}{r}c$

［解　説］

2次方程式の解と係数の関係についての問題です。式変形がやや煩雑です。

2

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(2\cos t,\ 2\sin t,\ 1)$，$\mathrm{Q}(-\sin 3t,\ \cos 3t,\ -1)$より，

$$\mathrm{PQ}^2=(2\cos t+\sin 3t)^2+(2\sin t-\cos 3t)^2+(1+1)^2$$
$$=4+1+4(\cos t\sin 3t-\sin t\cos 3t)+2^2=9+4\sin 2t$$

さて，$-180^\circ\leqq t\leqq 180^\circ$より，$-360^\circ\leqq 2t\leqq 360^\circ$である。

すると，$2t=-90^\circ,\ 270^\circ$　$(t=-45^\circ,\ 135^\circ)$のとき，$\sin 2t=-1$となり，$\mathrm{PQ}^2$は最小となる。

よって，PQ が最小となるのは，$t=-45^\circ$，$t=135^\circ$のときであり，このとき点 P の座標は，それぞれ$\mathrm{P}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 1)$，$\mathrm{P}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 1)$である。

(2)　条件$0^\circ\leqq\angle\mathrm{POQ}\leqq 90^\circ$から，$\cos\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}\geqq 0$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-2\cos t\sin 3t+2\sin t\cos 3t-1=-2\sin 2t-1\geqq 0$$

すると，$\sin 2t\leqq-\dfrac{1}{2}$の解は，$-360^\circ\leqq 2t\leqq 360^\circ$から，

$$-150^\circ\leqq 2t\leqq-30^\circ,\ 210^\circ\leqq 2t\leqq 330^\circ$$

よって，$-75^\circ\leqq t\leqq-15^\circ$，$105^\circ\leqq t\leqq 165^\circ$

[解 説]

空間ベクトルを題材としていますが，内容は三角関数の式変形です。

3

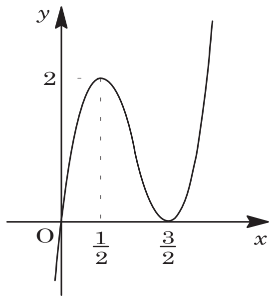
問題のページへ

(1)　$f(x)=4x^3-12x^2+9x$ に対して，

$$f'(x)=12x^2-24x+9$$
$$=3(2x-1)(2x-3)$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗

増減表より，極大値 2 $\left(x=\frac{1}{2}\right)$，極小値 0 $\left(x=\frac{3}{2}\right)$となり，$y=f(x)$のグラフは右図のようになる。



(2)　3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①は，$f(x)=p$ と表せる。

すると，方程式①の実数解は，$y=f(x)$のグラフと直線 $y=p$ との共有点の x 座標となる。

ここで，(1)のグラフを利用すると，$f(1)=1$から，方程式①の実数解の中で，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つである p の条件は，$0\leqq p<1$ となる。ただし，重解は解の個数が 2 であるとする。

［解 説］

方程式の解の個数を数えるとき，重解は一般的に 1 つとは数えません。上の解はこの立場で記しました。もし，重解を 1 つとして数えるならば，$p=2$ も答に加える必要があります。

4

問題のページへ

(1) ちょうど 3 回目に終了する場合は, 1 回目は任意の目, 2 回目は 1 回目と異なる目, 3 回目は 2 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5\times1}{6^3}=\frac{5}{36}$$

(2) 2 回目に終了する場合は, 2 回同じ目が出る場合で, その確率は,

$$\frac{6\times1}{6^2}=\frac{1}{6}$$

よって, 3 回目以内に終了する確率は, (1)と合わせて,

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$$

(3) ちょうど r 回目に終了する場合は, $r\geqq3$ のとき, 1 回目が任意の目, 2 回目から $r-1$ 回目までは, その前の回の目と異なる目が出て, r 回目に $r-1$ 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5^{r-2}\times1}{6^r}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{r-2}$$

この式に $r=2$ をあてはめると $\dfrac{1}{6}$ となり, 成立している。

よって, 求める確率は, $r\geqq2$ において, $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{r-2}$ である。

［解 説］

センターレベルの基本的な確率計算の問題です。