1

解答解説のページへ

実数 $x,\ y,\ z$ は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1) x の最大値と y の最小値を求めよ。

(2) $3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

空間内に，3 点 $\mathrm{A}_0(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}_1(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 α と，3 点 $\mathrm{B}_0(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}_1(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P$'$ も通っているとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}+a\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}+b\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}+p\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}+q\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$$

とおくとき, a, b を p, q で表せ。

(3) 点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき，点 P$'$ が動いてできる図形 C' の方程式を(2)の p, q で表し，C' が楕円であることを示せ。

3

解答解説のページへ

y 軸上の 2 点 A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$ と x 軸上の正の部分を動く点 P$(a,\ 0)$ を考える。$\theta = \angle \mathrm{APB}$ とおく。

(1)　$\cos\theta$ を a で表せ。

(2)　θ が最大になる a を求めよ。

4

解答解説のページへ

(1)　整数 $m,\ n$ に対して積分 $I_{m,\ n} = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx$ を求めよ。

(2)　自然数 n に対して積分 $J_n = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \cos kx \right)^2 dx$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

1つのさいころを投げ続けて，同じ目が2回連続して出たら終了するものとする。

(1)　4回目以内（4回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(2)　r 回目以内（r 回目も含む）に終了する確率を求めよ。ただし，$r \geqq 2$ とする。

1

問題のページへ

(1)　条件より, $x \leqq y \leqq z \leqq 1 \cdots\cdots ①$, $4x+3y+2z=1 \cdots\cdots ②$に対して,

②から $z=-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$ となり，①に代入すると,

$$x \leqq y \cdots\cdots ③,\quad y \leqq -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \cdots\cdots ④,\quad -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \leqq 1 \cdots\cdots ⑤$$

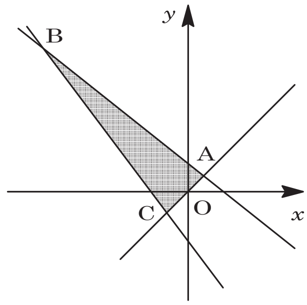
すると，④より $y \leqq -\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$，⑤より $y \geqq -\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ となる。

③④の境界線の交点をAとすると，$x=-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$ から，$x=\frac{1}{9}$，$y=\frac{1}{9}$

④⑤の境界線の交点をBとすると，$-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から，$x=-1$，$y=1$

③⑤の境界線の交点をCとすると，$x=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から，$x=-\frac{1}{7}$，$y=-\frac{1}{7}$

よって，③④⑤を満たす領域は右図の網点部となり，x の最大値は点Aの x 座標から $\frac{1}{9}$，y の最小値は点Cの y 座標より $-\frac{1}{7}$ である。



(2)　$P=3x-y+z$ とおくと，②より,

$$P=3x-y-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

これより，$y=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}P$ となり，傾き $\frac{2}{5}$ の直線群を表す。

よって，点Bを通るとき P は最小となり，最小値は,

$$P=-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-3$$

また，点Cを通るとき, P は最大となり，最大値は,

$$P=-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}+\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

以上より，$-3 \leqq 3x-y+z \leqq \frac{5}{7}$ である。

［解 説］

(1)の問題文で示唆されているように，z を消去すれば，領域と最大・最小の典型題となります。

2

問題のページへ

(1)　$\mathrm{A_0}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A_1}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{A_2}(1,\ 0,\ 1)$より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}=(1,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=(0,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{e_3}$$

また, $\mathrm{B_0}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B_1}(2,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B_2}\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}=(2,\ 0,\ 0)=2\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}$$

(2)　条件より, O, P, P′が同一直線上にあるので, tを実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OB_0}}+p\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}+q\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+a\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+b\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}})$$

(1)より, $2\overrightarrow{e_1}+p\overrightarrow{e_2}+q\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}\right)=t(\overrightarrow{e_1}+a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3})$

$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$は1次独立なので,

$$2+\frac{1}{2}q=t\cdots\cdots\cdots①,\ p=ta\cdots\cdots\cdots②,\ \frac{\sqrt{3}}{2}q=tb\cdots\cdots\cdots③$$

①②より, $p=\left(2+\frac{1}{2}q\right)a$, すなわち$2p=(4+q)a$となる。

ここで, $q=-4$のときは①から$t=0$となり, ③が成立しないことより,

$$a=\frac{2p}{4+q}\cdots\cdots\cdots④$$

①③より, $\frac{\sqrt{3}}{2}q=\left(2+\frac{1}{2}q\right)b$となり, $b=\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3)　条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{A_0P}}|=1$から, $|a\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+b\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}|=1$となり, $|a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}|=1$

$a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}=(0,\ a,\ b)$なので, $a^2+b^2=1$

④⑤を代入すると, $\left(\frac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$, $2p^2+q^2-4q=8$

$$\frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて, $\overrightarrow{\mathrm{B_0P}}=p\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}+q\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$であり,

$$|\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}|=|\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}=0$$

そこで, $\mathrm{B_0}$を原点とし, $\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}$を$p$軸の基本ベクトル, $\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$を$q$軸の基本ベクトルとして, 平面$\beta$上で直交座標系をつくることができる。このとき, 点P′の座標は$(p,\ q)$となるので, ⑥より, 点P′が動いてできる図形C'は楕円である。

[解 説]

大学入試に久々の登場ですが, 空間内の楕円を表現する問題です。一度は演習した方がよい問題です。

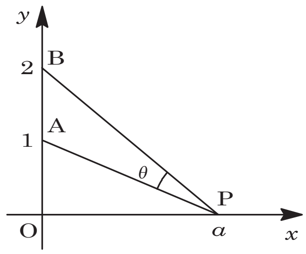
3

問題のページへ

(1)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AP}=\sqrt{a^2+1}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{a^2+4}$ より，

$$\cos\theta=\frac{(a^2+1)+(a^2+4)-1}{2\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2+4}}$$

$$=\frac{a^2+2}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+4)}}$$



(2)　(1)から，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{(a^2+2)^2}{(a^2+1)(a^2+4)}}$

ここで，$a^2=t>0$ とおくと，

$$\cos\theta=\sqrt{f(t)},\quad f(t)=\frac{(t+2)^2}{(t+1)(t+4)}$$

すると，$f'(t)=\dfrac{2(t+2)(t+1)(t+4)-(t+2)^2(2t+5)}{(t+1)^2(t+4)^2}=\dfrac{(t+2)(t-2)}{(t+1)^2(t+4)^2}$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となり，$\cos\theta$ も最小になる。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos\theta$ は単調に減少することから，$t=2$ すなわち $a=\sqrt{2}$ のとき，θ は最大となる。

［解 説］

余弦定理と微分法を組合せた問題です。なお，余弦定理のかわりに内積を利用することもできますし，微分法のかわりに相加平均と相乗平均の関係を利用することもできます。

4

問題のページへ

(1)　$I_{m,\,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx$ より，

(i)　$m\neq\pm n$ のとき

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Big]_0^{2\pi}=0$$

(ii)　$m=n\neq0$ のとき

$$I_{m,\,m}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2mx+1)\,dx=\frac{1}{2}\Big[\frac{\sin 2mx}{2m}+x\Big]_0^{2\pi}=\pi$$

(iii)　$m=-n\neq0$ のとき

$$I_{m,\,-m}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2mx)\,dx=\pi$$

(iv)　$m=n=0$ のとき

$$I_{0,\,0}=\int_0^{2\pi}dx=2\pi$$

(2)　$J_n=\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\Big)^2dx=\int_0^{2\pi}(\cos x+\sqrt{2}\cos 2x+\cdots+\sqrt{n}\cos nx)^2dx$

(1)より，$m\neq n$ のとき，$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$ なので，

$$J_n=\int_0^{2\pi}(\cos^2x+2\cos^2 2x+\cdots+n\cos^2 nx)\,dx=I_{1,\,1}+2I_{2,\,2}+\cdots+nI_{n,\,n}$$

$$=(1+2+\cdots+n)\pi=\frac{1}{2}n(n+1)\pi$$

［解 説］

定積分の有名問題です。(1)では，m，n が自然数だけではないので，場合分けが増えてしまいます。

5

問題のページへ

(1)　2 回目に終了する場合は, 2 回同じ目が出る場合で, その確率は,

$$\frac{6\times1}{6^2}=\frac{1}{6}$$

また, 3 回目に終了する場合は, 1 回目は任意の目, 2 回目は 1 回目と異なる目, 3 回目は 2 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5\times1}{6^3}=\frac{5}{36}$$

さらに, 4 回目に終了する場合は, 1 回目は任意の目, 2 回目, 3 回目はその前の回の目と異なる目, 4 回目は 3 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5^2\times1}{6^4}=\frac{25}{216}$$

以上より, 4 回目以内に終了する確率は,

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{91}{216}$$

(2)　ちょうど k 回目に終了する場合は, $k\geqq3$ のとき, 1 回目が任意の目, 2 回目から $k-1$ 回目までは, その前の回の目と異なる目が出て, k 回目に $k-1$ 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5^{k-2}\times1}{6^k}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$$

この式に $k=2$ をあてはめると $\frac{1}{6}$ となり, 成立している。

よって, r 回目以内に終了する確率は,

$$\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}}{1-\frac{5}{6}}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}$$

[解 説]

センターレベルの基本的な確率計算と等比数列の和の融合問題です。文系に類題が出ています。