1

解答解説のページへ

a, b を実数とする。方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，すべての解の絶対値が1以下であるとする。

(1)　この条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a+2b$ の最大値と最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1，a_2，…，a_n を考える。

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし，$j = 1$，2，3 とする。

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ。

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。

4

解答解説のページへ

$a>0$, $b \geqq 0$, $0<p<1$ とし，関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通るとする。このグラフの $0 \leqq x \leqq p$ に対応する部分を C で表す。

(1) b を a と p を用いて表せ。

(2) a が範囲 $p \leqq a \leqq 1$ を動くとき, C 上の点 $(x,\ y)$ の動く領域を D とする。

(i) x を固定して y の動く範囲を求めよ。

(ii) D を図示せよ。

(3) D の面積 S を p で表し，$\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ とおくと，$f(x)=0$ の実数解の絶対値が 1 以下より，

$$D=a^2-4b\geqq 0,\ b\leqq\frac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$$-1\leqq-\frac{a}{2}\leqq 1,\ -2\leqq a\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

$$f(-1)=1-a+b\geqq 0,\ b\geqq a-1\cdots\cdots\cdots③$$

$$f(1)=1+a+b\geqq 0,\ b\geqq -a-1\cdots\cdots\cdots④$$

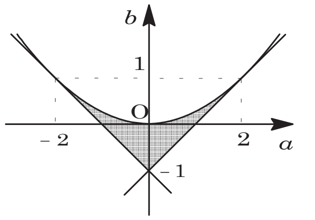
ここで，①と③の境界線の共有点の a 座標は，

$$\frac{a^2}{4}=a-1,\ (a-2)^2=0$$

よって，$a=2$ で接する。

同様に，①と④の境界線は $a=-2$ で接する。

以上より，①～④を満たす点 $(a,\ b)$ は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$a+2b=k$ とおくと，$b=-\frac{1}{2}a+\frac{k}{2}$ となり，ab 平面上で傾き $-\frac{1}{2}$，切片 $\frac{k}{2}$ の直線を表す。この直線が，(1)の領域と共有点をもつ k の範囲を求める。

すると，$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき k は最大となり，最大値は $k=a+2b=4$，また $(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき k は最小となり，最小値は $k=a+2b=-2$ である。

［解 説］

領域と最大・最小を組み合わせた典型問題です。

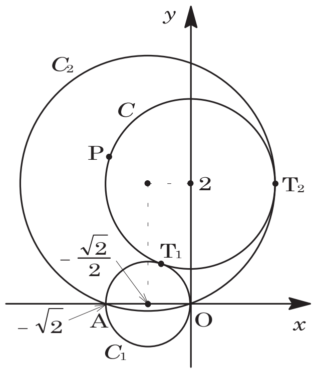
2

問題のページへ

(1)　$C : x^2+y^2-4y+2=0$ より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円 C は中心 $(0,\ 2)$，半径 $r=\sqrt{2}$ となる。

さて，中心 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ で，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円を C_1 とすると，その半径は $r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。



すると, C と C_1 の中心間距離は,

$$d_1=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

また，半径の和は，$r+r_1=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

よって，$d_1=r+r_1$ となり, 2 円 C と C_1 は外接する。

次に，中心 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ で, 2 点 A, O を通る円を C_2 とすると，その半径は,

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

すると，C と C_2 の中心間距離は $d_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，半径の差は $r_2-r=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$d_2=r_2-r$ より，円 C は円 C_2 に内接する。

(2)　C と C_1，C と C_2 の接点を T_1，T_2 とおくと，この接点以外は，C 上の点 P は円 C_1 の外部，円 C_2 の内部にあり,

$$\angle \mathrm{AT_2O} \leqq \angle \mathrm{APO} \leqq \angle \mathrm{AT_1O}$$

$$\cos\angle \mathrm{AT_1O} \leqq \cos\angle \mathrm{APO} \leqq \cos\angle \mathrm{AT_2O}$$

さて, AO は C_1 の直径なので $\angle \mathrm{AT_1O}=90^\circ$ となり，$\cos\angle \mathrm{AT_1O}=0$

また，C_2 の中心を B とおくと，$\angle \mathrm{AT_2O}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ABO}$ より,

$$\cos\angle \mathrm{AT_2O}=\frac{2}{r_2}=\frac{2}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\cos\angle \mathrm{APO}$ の最小値は 0，最大値は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

［解 説］

(1)の巧みな誘導により，(2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると，計算の海に溺れてしまいます。

3

問題のページへ

(1) (i)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合だけより，

$$A_n(1) = 1$$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるのは，$a_1 = 1$ のとき ${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1$ 通り，$a_1 = 2$ のとき 1 通りより，

$$A_n(2) = (n-1) + 1 = n$$

(ii)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$ のとき，a_{n-1} は，$a_{n-1} = 1$，$a_{n-1} = 2$，$a_{n-1} = 3$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ より，

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より，$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$a_{n-1} > a_n$ より，$a_{n-1} = 2,\ 3$ である。

(i)　$a_{n-1} = 2$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(2)$ 通り，また $a_n = 1$ より，この場合は，$A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$ 通りある。

(ii)　$a_{n-1} = 3$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(3)$ 通り，また $a_n = 1,\ 2$ より，この場合は，$A_{n-1}(3) \times 2 = \frac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$ 通りある。

(i)(ii)より，条件を満たす数列の数は，

$$(n-1) + (n-1)n = (n-1)(n+1)$$

［解 説］

漸化式を立てるという誘導がついていますが，場合の数の有名問題です。不等号に等号のついていないタイプが，2002 年に神戸大で出題されています。

4

問題のページへ

(1)　関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通ることより，

$$p^2=ap-bp^2$$

$0<p<1$ から，$p=a-bp$ となり，$b=\dfrac{a}{p}-1$ である。

(2)　(1)より，$y=ax-\left(\dfrac{a}{p}-1\right)x^2=a\left(x-\dfrac{x^2}{p}\right)+x^2$ ………(＊)

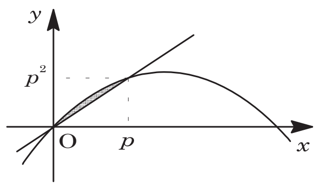
(i)　$0<p<1$，$0\leqq x\leqq p$ から，$x-\dfrac{x^2}{p}=\dfrac{x(p-x)}{p}\geqq 0$ となり，(＊)は a について増加関数であるので，$p\leqq a\leqq 1$ のとき，

$$p\left(x-\frac{x^2}{p}\right)+x^2\leqq y\leqq\left(x-\frac{x^2}{p}\right)+x^2,\quad px\leqq y\leqq\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x$$

(ii)　D の境界線 $y=px$，$y=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)x^2+x$ の交点は，

$$px=\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x,\quad \frac{p-1}{p}x^2+(1-p)x=0$$

よって，$x=0,\ p$ となり，領域 D は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(3)　D の面積 S は，

$$S=\int_0^p\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x-px\right\}dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^p x(x-p)\,dx$$

$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)p^3=\frac{1}{6}(p^2-p^3)$$

$$S'=\frac{1}{6}(2p-3p^2)=\frac{1}{6}p(2-3p)$$

$\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3}{4}$ において，S の増減は右表のようになり，S の最大値は $\dfrac{2}{81}$，最小値は $\dfrac{1}{48}$ である。

p	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
S'		＋	0	−	
S	$\frac{1}{48}$	↗	$\frac{2}{81}$	↘	$\frac{3}{128}$

［解 説］

微積分についての標準的な問題です。題意に従って計算を進めれば，結論に至ります。