

**1**

解答解説のページへ

方程式  $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$  で定義される円  $C$  を考える。

- (1) 点  $A(-\sqrt{2}, 0)$  と点  $O(0, 0)$  を通り, 円  $C$  に接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 点  $P$  が円  $C$  上を動くとき,  $\cos \angle APO$  の最大値と最小値を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

4 枚のカードがあって、1 から 4 までの整数が 1 つずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1 枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を  $n$  回繰り返して、記録した順に数字を並べて得られる数列を、 $a_1, a_2, \dots, a_n$  とする。

(1) 条件  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$  を満たす数列が  $A_n(j)$  通りあるとする。ただし、 $j=1, 2, 3, 4$  とする。

(i)  $A_n(1), A_n(2)$  を求めよ。

(ii)  $n \geq 2$  のとき、 $A_n(j)$  ( $j=3, 4$ ) を  $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \dots, A_{n-1}(j)$  で表し、 $A_n(3), A_n(4)$  を求めよ。

(2)  $n \geq 2$  のとき、条件  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$  かつ  $a_{n-1} > a_n$  となる確率を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

$xy$  平面上の曲線  $y = xe^x$  と  $x$  軸および 2 直線  $x = n$ ,  $x = n + 1$  で囲まれる図形を  $D_n$  とする。ただし,  $n$  を自然数とする。

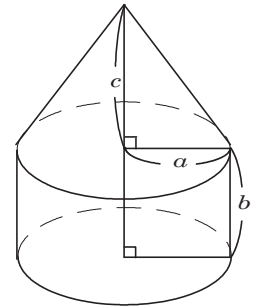
(1) 図形  $D_n$  の面積を  $S_n$  として,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{ne^n}$  を求めよ。

(2) 図形  $D_n$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を  $V_n$  として,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{(S_n)^2}$  を求めよ。

4

解答解説のページへ

図のような、半径  $a$  の円を底面とする高さ  $b$  の円柱の上に、同じ大きさの円を底面とする高さ  $c$  の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。



(1)  $V$  をこの建物の体積,  $S$  をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。 $V$  と  $S$  を  $a, b, c$  で表せ。

(2)  $V$  を一定に保ちながら  $a, b, c$  を動かして,  $S$  を最小にした

い。

(i)  $b = xa$ ,  $c = ya$  とおき,  $V$  と  $a$  を一定としたとき,  $S$  の最小値  $T$  を  $V$  と  $a$  で表せ。

(ii)  $T$  が最小になるときの比  $a : b : c$  を求めよ。

5

解答解説のページへ

楕円  $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  と双曲線  $C_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  を考える。  $C_1$  と  $C_2$  の焦点が一致しているならば、  $C_1$  と  $C_2$  の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。

1

問題のページへ

(1)  $C: x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$  より,  $x^2 + (y-2)^2 = 2$

これより, 円  $C$  の中心は  $C(0, 2)$ , 半径は  $r = \sqrt{2}$  となる。

さて,  $A(-\sqrt{2}, 0)$ ,  $O(0, 0)$  を通る円の中心は, 線分  $AO$  の垂直二等分線上にあるので, その座標を  $B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, t)$  とおくことができる。

$$\text{すると, 半径は, } BO = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + t^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + t^2}$$

$$\text{また, 中心間距離は, } BC = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + (t-2)^2}$$

条件より, 半径の和または差が中心間距離に等しいので,

$$\left| \sqrt{\frac{1}{2} + t^2} \pm \sqrt{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{2} + (t-2)^2}, \quad \left( \sqrt{\frac{1}{2} + t^2} \pm \sqrt{2} \right)^2 = \frac{1}{2} + (t-2)^2$$

$$\pm \sqrt{1+2t^2} = -2t+1, \quad 1+2t^2 = (-2t+1)^2, \quad t^2 - 2t = 0$$

よって,  $t = 0, 2$  となり, 中心の座標は  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ ,  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$  である。

(2)  $C$  に外接する円を  $C_1$ ,  $C$  を内接する円を  $C_2$  とし,  $C$  と  $C_1$ ,  $C_2$  の接点をそれぞれ  $T_1$ ,  $T_2$  とおく。

この 2 つの接点以外は,  $C$  上の点  $P$  は円  $C_1$  の外部, 円  $C_2$  の内部にあり,

$$\angle AT_2O \leq \angle APO \leq \angle AT_1O$$

$$\cos \angle AT_1O \leq \cos \angle APO \leq \cos \angle AT_2O$$

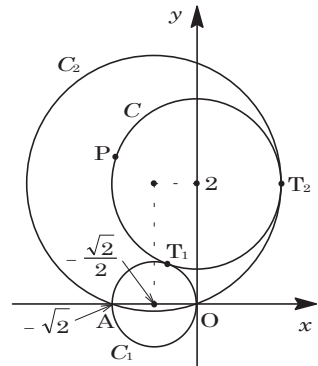
さて,  $AO$  は  $C_1$  の直径なので  $\angle AT_1O = 90^\circ$  となり,

$$\cos \angle AT_1O = 0$$

$C_2$  の中心を  $B_2$  とおくと,  $\angle AT_2O = \frac{1}{2} \angle AB_2O$  より,

$$\cos \angle AT_2O = \frac{2}{B_2O} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2} + 2^2}} = \frac{2}{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって,  $\cos \angle APO$  の最小値は 0, 最大値は  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  である。



### [解説]

(1)の巧みな誘導により, (2)は図形的に解くことができます。この設問を, 誘導を無視して押し通そうとすると, 計算の海に溺れてしまいます。なお, (1)の設定の異なる類題が, 文系で出ています。

2

問題のページへ

(1) (i)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = 1$  となるのは,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$  の場合だけより,

$$A_n(1) = 1$$

また,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = 2$  となるのは,  $a_1 = 1$  のとき  ${}_{n-1}C_1 = n-1$  通り,  $a_1 = 2$  のとき 1 通りより,

$$A_n(2) = (n-1) + 1 = n$$

(ii)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = 3$  のとき,  $a_{n-1}$  は,  $a_{n-1} = 1$ ,  $a_{n-1} = 2$ ,  $a_{n-1} = 3$  のいずれかであり, その場合の数はそれぞれ  $A_{n-1}(1)$ ,  $A_{n-1}(2)$ ,  $A_{n-1}(3)$  より,

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より,  $A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

$$\text{よって, } n \geq 2 \text{ のとき, } A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^n k = 1 + \sum_{k=2}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

また,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = 4$  のとき,  $a_{n-1}$  は,  $a_{n-1} = 1$ ,  $a_{n-1} = 2$ ,  $a_{n-1} = 3$ ,  $a_{n-1} = 4$  のいずれかであり, その場合の数はそれぞれ  $A_{n-1}(1)$ ,  $A_{n-1}(2)$ ,  $A_{n-1}(3)$ ,  $A_{n-1}(4)$  より,

$$A_n(4) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4)$$

$$\text{すると, } A_n(4) = 1 + (n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n + A_{n-1}(4) = A_{n-1}(4) + \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

よって,  $n \geq 2$  のとき,

$$\begin{aligned} A_n(4) &= A_1(4) + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2}(k^2 + k) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (k^2 + k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \right\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

(2) 1 から 4 までの整数を重複して  $n$  個並べる  $4^n$  通りの場合が同様に確からしい。

さて,  $a_{n-1} > a_n$  より,  $a_{n-1} = 2, 3, 4$  である。

(i)  $a_{n-1} = 2$  のとき

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$  を満たす数列が  $A_{n-1}(2)$  通り, また  $a_n = 1$  より, この場合は,  $A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$  通りある。

(ii)  $a_{n-1} = 3$  のとき

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$  を満たす数列が  $A_{n-1}(3)$  通り, また  $a_n = 1, 2$  より, この場合は,  $A_{n-1}(3) \times 2 = \frac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$  通りある。

(iii)  $a_{n-1} = 4$  のとき

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$  を満たす数列が  $A_{n-1}(4)$  通り, また  $a_n = 1, 2, 3$  より, この場合は,  $A_{n-1}(4) \times 3 = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \times 3 = \frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$  通りある。

(i)(ii)(iii)より, 条件を満たす数列の数は,

$$(n-1) + (n-1)n + \frac{1}{2}(n-1)n(n+1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+1)(n+2)$$

以上より、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$  かつ  $a_{n-1} > a_n$  となる確率は、

$$\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4^n}$$

### [解説]

漸化式を立てるという誘導がついていますが、場合の数の有名問題です。なお、3枚のカードの場合が、文系で出題されています。



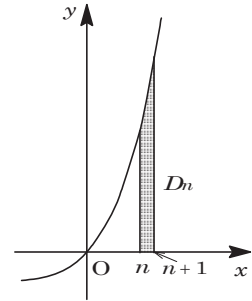
3

問題のページへ

(1)  $D_n$  の面積  $S_n$  は,

$$\begin{aligned} S_n &= \int_n^{n+1} x e^x dx = [x e^x]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} e^x dx \\ &= (n+1)e^{n+1} - n e^n - [e^x]_n^{n+1} \\ &= n e^{n+1} - (n-1)e^n \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e - \frac{n-1}{n} \right) = e - 1$$

(2)  $D_n$  を  $x$  軸のまわりに回転してできる立体の体積  $V_n$  は,

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_n^{n+1} x^2 e^{2x} dx = \pi \left\{ \left[ \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} x e^{2x} dx \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{2} (n+1)^2 e^{2(n+1)} - \frac{1}{2} n^2 e^{2n} - \left[ \frac{1}{2} x e^{2x} \right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{1}{2} e^{2x} dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ (n+1)^2 e^{2(n+1)} - n^2 e^{2n} - (n+1) e^{2(n+1)} + n e^{2n} + \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_n^{n+1} \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \left\{ (2n^2 + 2n + 1) e^{2(n+1)} - (2n^2 - 2n + 1) e^{2n} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{(S_n)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(2n^2 + 2n + 1) e^{2(n+1)} - (2n^2 - 2n + 1) e^{2n}}{n^2 e^{2(n+1)} - 2n(n-1) e^{2n+1} + (n-1)^2 e^{2n}} \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^2 - \left( 2 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{e^2 - 2 \left( 1 - \frac{1}{n} \right) e + \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2e^2 - 2}{e^2 - 2e + 1} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(e+1)(e-1)}{(e-1)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e+1}{e-1} \end{aligned}$$

## [解説]

慎重さが要求される積分の計算問題です。とりたてて工夫もせずに、計算を進めました。

4

問題のページへ

(1) 右の建物の体積  $V$ , 底面を除く表面積  $S$  は,

$$V = \pi a^2 b + \frac{1}{3} \pi a^2 c = \frac{1}{3} \pi a^2 (3b + c)$$

$$S = 2\pi a b + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} \cdot 2\pi a = \pi a (2b + \sqrt{a^2 + c^2})$$

(2) (i)  $b = xa$ ,  $c = ya$  より,

$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 (3xa + ya) = \frac{1}{3} \pi a^3 (3x + y) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$S = \pi a (2xa + \sqrt{a^2 + y^2 a^2}) = \pi a^2 (2x + \sqrt{1 + y^2})$$

①より,  $x = \frac{V}{\pi a^3} - \frac{y}{3} \dots\dots\dots \textcircled{2}$ となるので,

$$S = \pi a^2 \left( \frac{2V}{\pi a^3} - \frac{2y}{3} + \sqrt{1 + y^2} \right) = \frac{2V}{a} + \frac{\pi a^2}{3} (-2y + 3\sqrt{1 + y^2})$$

ここで,  $y > 0$  において,  $f(y) = -2y + 3\sqrt{1 + y^2}$  とおくと,

$$f'(y) = -2 + \frac{3 \cdot 2y}{2\sqrt{1 + y^2}} = \frac{-2\sqrt{1 + y^2} + 3y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

$f'(y) = 0$  とすると,  $2\sqrt{1 + y^2} = 3y$

$$y^2 = \frac{4}{5}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

右表より,  $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$  のとき  $f(y)$  は最小となり,  $S$  の最小値  $T$  は,

$$T = \frac{2V}{a} + \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}$$

(ii)  $\frac{dT}{da} = -\frac{2V}{a^2} + \frac{2\sqrt{5}\pi a}{3} = \frac{2\sqrt{5}\pi a^3 - 6V}{3a^2}$

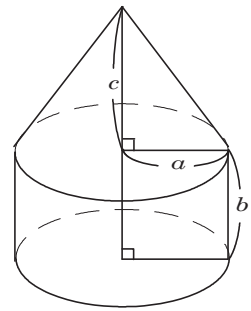
右表より,  $a^3 = \frac{3V}{\sqrt{5}\pi}$  のとき  $T$  は最小となる。

このとき,  $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$  なので, ②より,

$$x = \frac{V}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{5}\pi}{3V} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

以上より,  $T$  が最小になるとき,

$$a : b : c = 1 : x : y = 1 : \frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} : 1 : 2$$



|         |   |     |                      |     |
|---------|---|-----|----------------------|-----|
| $y$     | 0 | ... | $\frac{2}{\sqrt{5}}$ | ... |
| $f'(y)$ |   | -   | 0                    | +   |
| $f(y)$  |   | ↘   | $\sqrt{5}$           | ↗   |

|                 |   |     |   |     |
|-----------------|---|-----|---|-----|
| $a$             | 0 | ... | $\left(\frac{3V}{\sqrt{5}\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ | ... |
| $\frac{dT}{da}$ |   | -   | 0   | +   |
| $T$             |   | ↘   |   | ↗   |

[解説]

②から,  $0 < y < \frac{3V}{\pi a^3}$  となりますが,  $\frac{2}{\sqrt{5}} < \frac{3V}{\pi a^3}$  は満たされているという条件のもとで解いています。

5

問題のページへ

楕円  $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  と双曲線  $C_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  の焦点が一致することより,

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2 + b^2 \quad (\alpha^2 > \beta^2) \dots\dots\dots ①$$

さて,  $C_1$  と  $C_2$  の交点の座標を  $(p, q)$  とおくと,

$$\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{q^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta^2 p^2 + \alpha^2 q^2 = \alpha^2 \beta^2 \dots\dots\dots ②$$

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 1, \quad b^2 p^2 - a^2 q^2 = a^2 b^2 \dots\dots\dots ③$$

ここで, 交点  $(p, q)$  における  $C_1$  と  $C_2$  の接線をそれぞれ  $l_1, l_2$  とおくと,

$$l_1 : \frac{px}{\alpha^2} + \frac{qy}{\beta^2} = 1, \quad l_2 : \frac{px}{a^2} - \frac{qy}{b^2} = 1$$

これより,  $l_1, l_2$  の法線ベクトル  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  は,  $\vec{n}_1 = \left( \frac{p}{\alpha^2}, \frac{q}{\beta^2} \right), \vec{n}_2 = \left( \frac{p}{a^2}, -\frac{q}{b^2} \right)$

ここで, ②③をまとめると,  $\begin{pmatrix} \beta^2 & \alpha^2 \\ b^2 & -a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \beta^2 \\ a^2 b^2 \end{pmatrix}$  となり,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{-a^2 \beta^2 - \alpha^2 b^2} \begin{pmatrix} -a^2 & -\alpha^2 \\ -b^2 & \beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 \beta^2 \\ a^2 b^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 \alpha^2 \beta^2 + a^2 \alpha^2 b^2 \\ \alpha^2 b^2 \beta^2 - a^2 b^2 \beta^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= \frac{p^2}{\alpha^2 a^2} - \frac{q^2}{\beta^2 b^2} = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2} (\beta^2 + b^2) - \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2} (\alpha^2 - a^2) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 + \alpha^2 b^2} (-\alpha^2 + \beta^2 + a^2 + b^2) \end{aligned}$$

①より,  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$  となるので, 2 接線  $l_1, l_2$  は直交する。

### [解説]

文字が多くて計算は簡単ではありませんが, 楕円と双曲線についての有名問題です。