1

解答解説のページへ

xy 平面において，放物線 $y=-x^2+6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ，$(a,\ 0)$ と $(a,\ -a^2+6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える。ただし，$0<a<3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

(2)　$S(a)$ の値が最大となる a の値を求め，関数 $S(a)$ のグラフをかけ。

2

解答解説のページへ

a を定数とする。xy 平面上の点の集合 $X(a)$, L を次のように定める。

$$X(a)=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ (x-a)^2+y^2 \leqq \frac{(a+1)^2}{4}\right\}$$

$$L=\{(x,\ y)\mid y=x-1\}$$

(1)　$X(a)\cap L=\phi$ となるような a の値の範囲を求めよ。（ただし，ϕ は空集合を表す）

(2)　いかなる実数 a に対しても $\mathrm{P}\notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め，xy 平面上に図示せよ。

3　解答解説のページへ

k を実数とし，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$k=2$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(2)　すべての n について，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ を満たす α，β に対して，$\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=1$ が成り立つことを示せ。

(3)　(2)において，異なる実数 α と β が存在するための k の条件を求め，そのときの α と β の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

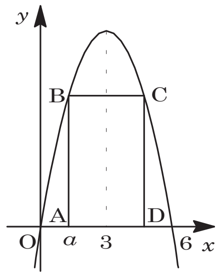
(1) 出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。

(2) 出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 である確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$0 < a < 3$ のとき，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と $\mathrm{B}(a,\ -a^2+6a)$ とおくと，題意を満たす長方形ABCDの面積が最大となる場合を考える。



すると，放物線 $y=-x^2+6x$ の軸の方程式が $x=3$ より，$\mathrm{C}(6-a,\ -(6-a)^2+6(6-a))$，$\mathrm{D}(6-a,\ 0)$ のときであり，長方形ABCDの面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=2(3-a)(-a^2+6a)=2a^3-18a^2+36a$$

(2)　(1)より，$S'(a)=6(a^2-6a+6)$

$S'(a)=0$ とすると，$0 < a < 3$ から，

$$a=3-\sqrt{3}$$

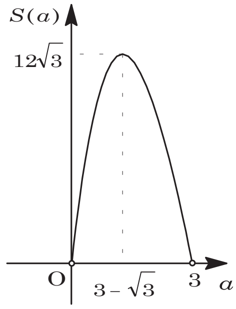
よって，$0 < a < 3$ における $S(a)$ の増減は，右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$a=3-\sqrt{3}$ のとき，$S(a)$ の値は最大となり，最大値は，

$$S(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=12\sqrt{3}$$

以上より，関数 $S(a)$ のグラフを描くと，右図のようになる。ただし，白丸は除く。



［解　説］

教科書の例題に採用されているような問題です。ただ，冒頭の記述は，やや雑すぎるかもしれません。

2

問題のページへ

(1)　$X(a)=\left\{(x,\ y)\,\middle|\,(x-a)^2+y^2\leqq\dfrac{(a+1)^2}{4}\right\}$，$L=\{(x,\ y)\mid y=x-1\}$に対し，

(i)　$a+1=0\ (a=-1)$のとき

$X(a)=\{(x,\ y)\mid(x+1)^2+y^2\leqq 0\}$より，集合$X(a)$は$(x,\ y)=(-1,\ 0)$のみとなる。よって，$X(a)\cap L=\phi$を満たす。

(ii)　$a+1\neq 0\ (a\neq -1)$のとき

$X(a)\cap L=\phi$となる条件は，円$(x-a)^2+y^2\leqq\dfrac{(a+1)^2}{4}$……①と直線$y=x-1$すなわち$x-y-1=0$……②が共有点をもたないことである。

そこで，円①の中心は$(a,\ 0)$，半径$\dfrac{|a+1|}{2}$より，

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>\frac{|a+1|}{2},\ \ \sqrt{2}|a-1|>|a+1|$$

両辺を2乗して，$2(a-1)^2>(a+1)^2$，$a^2-6a+1>0$

$$a<3-2\sqrt{2},\ \ 3+2\sqrt{2}<a\quad(a\neq -1)$$

(i)(ii)より，$a<3-2\sqrt{2}$，$3+2\sqrt{2}<a$

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$としたとき，$\mathrm{P}\notin X(a)$である条件は，どんなaに対しても，

$$(x-a)^2+y^2>\frac{(a+1)^2}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より，$4x^2+4y^2-8ax+3a^2-2a-1>0$となり, aについてまとめ直すと，

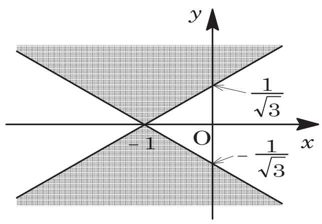
$$3a^2-2(4x+1)a+4x^2+4y^2-1>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

④がつねに成り立つ条件は，$D/4=(4x+1)^2-3(4x^2+4y^2-1)<0$であり，

$$x^2+2x+1-3y^2<0,\ \ (x+1)^2-3y^2<0$$

$$(x+1-\sqrt{3}y)(x+1+\sqrt{3}y)<0$$

よって，題意を満たす点Pの集合を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



［解 説］

集合の記号を用いて記述された問題文のために，一見，近寄りがたい雰囲気がありますが，内容は，集合と領域についての標準的なものです。

3

問題のページへ

(1)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ ……①に対し，$k=2$のとき，

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,\quad a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$$

よって，$a_{n+1}-a_n=a_2-a_1=1$

すると，数列$\{a_n\}$は公差１の等差数列となるので，

$$a_n=a_1+(n-1)=n-1$$

(2)　条件より，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$ka_{n+1}-a_n=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$ ………③

すべてのnについて，③が成立する条件を求める。

まず，$n=1$のとき成立することより，$k=\alpha+\beta$

このとき，③は$a_n=\alpha\beta a_n$となり，$n=2$のとき成立することより，$1=\alpha\beta$

逆に，$k=\alpha+\beta$，$1=\alpha\beta$のとき，どんなnに対しても，明らかに③は成立する。

よって，すべてのnについて，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$が成り立つ条件は，

$$\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=1$$

(3)　異なる実数αとβが存在する条件は，(2)からα，βが２次方程式$x^2-kx+1=0$の２つの解より，

$$D=k^2-4>0$$

よって，$k<-2$，$2<k$となり，このとき，

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2},\ \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\right),\ \left(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2},\ \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}\right)$$

［解 説］

(2)では，必要条件を求め，十分性を確認するというスタイルで記述しましたが，これが，出題者の意図に沿うものかどうかは不明です。

4

問題のページへ

(1) 出る目の最小値が 1 である事象を X とし，この確率を $P(X)$ とおく。

$\overline{X}$ は，出る目がすべて 2 以上である事象を表すので，

$$P(\overline{X})=\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

よって，$P(X)=1-P(\overline{X})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}$

(2) 出る目の最大値が 6 である事象を Y とし，この確率を $P(Y)$ とおく。

$\overline{Y}$ は，出る目がすべて 5 以下である事象を表すので，

$$P(\overline{Y})=\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

さて，出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 である事象は $X\cap Y$ より，

$$P(X\cap Y)=1-P(\overline{X\cap Y})=1-P(\overline{X}\cup\overline{Y})$$
$$=1-\left\{P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})\right\}$$

ここで，$\overline{X}\cap\overline{Y}$ は，出る目がすべて 2 以上 5 以下である事象を表すので，

$$P(\overline{X}\cap\overline{Y})=\left(\frac{4}{6}\right)^4$$

よって，$P(X\cap Y)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4-\left(\frac{5}{6}\right)^4+\left(\frac{4}{6}\right)^4=\frac{151}{648}$

［解 説］

類題が多くの参考書に掲載されている有名な頻出問題です。