1

解答解説のページへ

α, β を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし, $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を, $f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$ とする。

(1) $f(x)$ の最大値を M とする。$f(x)=M$ となる x がちょうど 3 つあるとき, 実数 α, β と M の値を求めよ。

(2) (1)で求めた α, β について, $f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とし，2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，A の n 乗を $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ と表す。

(1)　$a_n=d_n$ と $b_n=c_n$ を示せ。

(2)　n が奇数ならば a_n は偶数であること，および，n が偶数ならば a_n は奇数であることを示せ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ とする。

(1)　$0<x<1$ ならば, $0<f(x)<1$ となることを示せ。

(2)　$f(x)-x=0$ となる x をすべて求めよ。

(3)　$0<\alpha<1$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\alpha\ ,\ \ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とする。α の値に応じて, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

xyz 空間の原点 O と, O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A, B, C, D を考える。点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\ \sin\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ 0\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ とする。点 C, D は $\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{DOA}=\angle\mathrm{DOB}$ を満たし, 点 C の z 座標は正, 点 D の z 座標は負とする。

(1) 点 C の座標を α と $\theta=\angle\mathrm{COA}$ $(0<\theta<\pi)$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき, 点 C の座標を求めよ。

5

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で定義された連続関数とする。

(1)　$f(x)=\int_0^1 e^{x+t}f(t)\,dt$ を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x)=0$ のみであることを示せ。

(2)　$g(x)=\int_0^1 e^{x+t}g(t)\,dt+x$ を満たす $g(x)$ を求めよ。

1

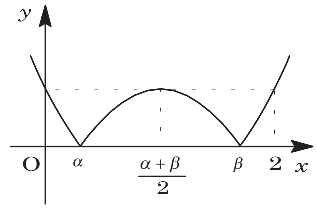
問題のページへ

(1)　$f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$に対し，次の区間における$f(x)$の最大値$M$を考えると，

$0\leqq x\leqq\alpha$における最大値は，$M=f(0)=\alpha\beta$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$における最大値は，

$$M=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\left|\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$



$\beta\leqq x\leqq 2$における最大値は，

$$M=f(2)=(2-\alpha)(2-\beta)$$

これより，$0\leqq x\leqq 2$において，$f(x)=M$となるxがちょうど3つある条件は，

$$\alpha\beta=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\cdots\cdots\cdots①,\ \ \alpha\beta=(2-\alpha)(2-\beta)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2=0$，$(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta=0\cdots\cdots\cdots③$

②より，$4-2\alpha-2\beta=0$，$\alpha+\beta=2\cdots\cdots\cdots④$

③④から$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，α，βは 2 次方程式 $t^2-2t+\dfrac{1}{2}=0$の 2 つの解より，$t=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$であり，$0<\alpha<\beta<2$から，

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \ \beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\ \ M=\alpha\beta=\frac{1}{2}$$

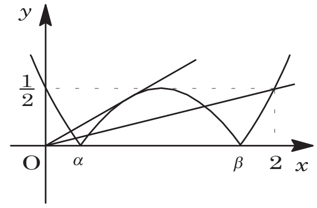
(2)　$f(x)-mx=0$が異なる 3 つの解をもつ条件は，$y=f(x)$のグラフと直線$y=mx$が異なる3つの共有点をもつことである。

まず，$\alpha\leqq x\leqq\beta$において，④⑤より，

$$f(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta=-x^2+2x-\frac{1}{2}$$

そこで，$y=f(x)$と$y=mx$の共有点の条件は，

$$-x^2+2x-\frac{1}{2}=mx,\ \ x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}=0$$



重解をもつことより，$D=(m-2)^2-2=0$となり，右図から，$m=2-\sqrt{2}$

また，直線$y=mx$が点$\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき，$m=\dfrac{1}{4}$である。

よって，求めるmの範囲は，右図より，$\dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{2}$である。

[解 説]

絶対値つきの関数を題材にした文系風の頻出問題です。

2

問題のページへ

(1)　$a_n = d_n$，$b_n = c_n$ を数学的帰納法によって示す。

(i)　$n = 1$ のとき

$a_1 = d_1 = 2$，$b_1 = c_1 = 1$ より，成立する。

(ii)　$n = k$ のとき

$a_k = d_k$，$b_k = c_k$ と仮定すると，

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_k + b_k & a_k + 2b_k \\ 2b_k + a_k & b_k + 2a_k \end{pmatrix}$$

よって，$a_{k+1} = d_{k+1}$，$b_{k+1} = c_{k+1}$ となり，$n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$a_n = d_n$，$b_n = c_n$ である。

(2)　$A^{n+2} = A^{n+1} A = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n & a_n + 2b_n \\ 2b_n + a_n & b_n + 2a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ より，

$$a_{n+2} = 2(2a_n + b_n) + a_n + 2b_n = 5a_n + 4b_n = a_n + 2(2a_n + 2b_n)$$

これより，a_n と a_{n+2} の偶奇は一致する。

すると，$a_1 = 2$，$a_2 = 2a_2 + b_2 = 5$ であることから，帰納的に，n が奇数ならば a_n は偶数，また n が偶数ならば a_n は奇数となる。

［解 説］

(2)は簡略に記しましたが，数学的帰納法の証明スタイルでも構いません。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{6x(2x^2+1)-3x^2\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{6x}{(2x^2+1)^2}$

$0<x<1$ のとき，$f'(x)>0$ から，$f(x)$ は単調に増加する。

すると，$f(0)=0$，$f(1)=1$ から，$0<f(x)<1$ である。

(2)　$f(x)-x=0$ から，$\dfrac{3x^2}{2x^2+1}=x$ となり，

$$2x^3-3x^2+x=0,\ \ x(x-1)(2x-1)=0$$

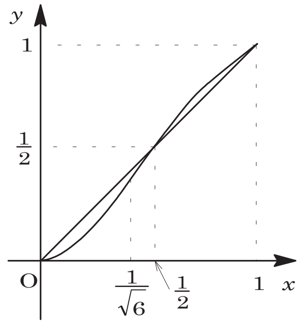
よって，$x=0,\ 1,\ \dfrac{1}{2}$

(3)　$f''(x)=\dfrac{6(2x^2+1)^2-6x\cdot 2(2x^2+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^4}$

$$=\frac{-6(6x^2-1)}{(2x^2+1)^3}$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{3}{8}$	↗	

これより，$0<x<1$ における $y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(i)　$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ のとき

まず，$a_1=\alpha$ であり，また $0<a_k\leqq\alpha$ とすると，$a_{k+1}=f(a_k)$ なので，グラフから $0<a_{k+1}<\alpha$ となる。

これより，帰納的に $0<a_n\leqq\alpha$ である。

さて，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ において，$g(x)=\dfrac{3x}{2x^2+1}$ とおく。

$$g'(x)=\frac{3(2x^2+1)-3x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{-3(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	1

すると，$f(x)=g(x)\cdot x$ であり，$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ より，

$$a_{n+1}=g(a_n)\cdot a_n\leqq g(\alpha)\cdot a_n$$

よって，$0<a_n\leqq\alpha\{g(\alpha)\}^{n-1}$

$0<g(\alpha)<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\{g(\alpha)\}^{n-1}\to 0$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である。

(ii)　$\alpha=\dfrac{1}{2}$ のとき

$a_1=\dfrac{1}{2}$ であり，(2)より，$a_2=a_3=\cdots=a_n=\dfrac{1}{2}$ となる。

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$ である。

(iii)　$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ のとき

まず，$a_1=\alpha$ であり，また $\alpha\leqq a_k<1$ とすると，$a_{k+1}=f(a_k)$ なので，グラフか

ら $\alpha < a_{k+1} < 1$ となる。

これより，帰納的に $\alpha \leqq a_n < 1$ である。

さて，$a_{n+1} = \dfrac{3a_n^{\ 2}}{2a_n^{\ 2}+1}$ より，

$$1 - a_{n+1} = 1 - \frac{3a_n^{\ 2}}{2a_n^{\ 2}+1} = \frac{1-a_n^{\ 2}}{2a_n^{\ 2}+1} = \frac{a_n+1}{2a_n^{\ 2}+1}(1-a_n)$$

ここで，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ において，$h(x) = \dfrac{x+1}{2x^2+1}$ とおくと，

$$h'(x) = \frac{2x^2+1-(x+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-(2x^2+4x-1)}{(2x^2+1)^2}$$

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

$h'(x) = 0$ の解は $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{6}}{4}$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ における $h(x)$ の増減は右表のようになる。

すると，$\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$ より，$\alpha \leqq a_n < 1$ において，

$$1 - a_{n+1} = h(a_n)(1-a_n) \leqq h(\alpha)(1-a_n)$$

よって，$0 < 1 - a_n \leqq (1-\alpha)\{h(\alpha)\}^{n-1}$

$0 < h(\alpha) < 1$ より，$n \to \infty$ のとき $\{h(\alpha)\}^{n-1} \to 0$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_n) = 0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ である。

［解　説］

記憶は定かではありませんが，漸化式で与えられた数列の極限値だけをグラフで予測せよという乱暴な問題が 20 年以上も前にありました。その流れを汲むのが(3)の設問で，漸化式をグラフで解くという知識が必須です。

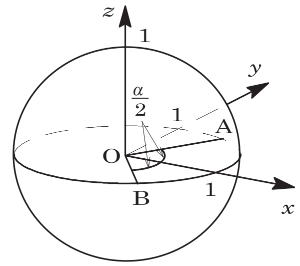
$\boxed{4}$　問題のページへ

(1)　$C(p,\ q,\ r)$とおくと，条件より $p^2+q^2+r^2=1\quad(r>0)$ ………①

さて，$\angle COA=\angle COB=\theta$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ であり，$0<\alpha<\pi$ として，$\overrightarrow{OA}=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OB}=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ -\sin\frac{\alpha}{2},\ 0\right)$となる。

そこで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta$ より，

$$p\cos\frac{\alpha}{2}+q\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\theta \text{ ………②}$$



また，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta$ より，

$$p\cos\frac{\alpha}{2}-q\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\theta \text{ ………③}$$

②③より，$0<\alpha<\pi$ から，$q=0$，$p=\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

①より，$r=\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$ となり，$C\left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}},\ 0,\ \sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\right)$である。

(2)　まず，対称性より，$C(p,\ 0,\ r)$に対し，$D(p,\ 0,\ -r)$とおくことができる。

さて，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいという条件は，$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$のなす角がα から，$\theta=\alpha$ かつ$\angle COD=\alpha$ と同値である。

そこで，(1)より，$p=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ………④

また，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cos\alpha$ より，$p^2-r^2=\cos\alpha$ ………⑤

①より，$q=0$ なので，$p^2+r^2=1$ ………⑥

⑤⑥より，$2p^2=1+\cos\alpha$ となり，④を代入すると，$2\cos^2\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot(1+\cos\alpha)$

$$4\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)^2,\quad 3\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$$

よって，$(3\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)=0$ から，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}\quad(0<\alpha<\pi)$となる。

すると，$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$ より，$\cos\frac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，

$$p=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad r=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

以上より，$C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$である。

[解 説]

空間ベクトルを題材にした計算問題です。見かけよりは時間がかかります。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x\int_0^1 e^t f(t)\,dt$ に対し，$A=\int_0^1 e^t f(t)\,dt$ ……①とおくと，

$$f(x)=Ae^x \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$A=\int_0^1 Ae^{2t}dt=A\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1=\frac{1}{2}A(e^2-1)$

よって，$(3-e^2)A=0$ から $A=0$ となり，$f(x)=0$ である。

(2)　$g(x)=e^x\int_0^1 e^t g(t)\,dt+x$ に対し，$B=\int_0^1 e^t g(t)\,dt$ ……③とおくと，

$$g(x)=Be^x+x \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$B=\int_0^1 e^t(Be^t+t)\,dt=\int_0^1(Be^{2t}+te^t)\,dt$

$$=B\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1+\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{2}B(e^2-1)+e-(e-1)$$

$$=\frac{1}{2}B(e^2-1)+1$$

よって，$(3-e^2)B=2$ から，$B=\frac{2}{3-e^2}$ となり，

$$g(x)=\frac{2}{3-e^2}e^x+x$$

［解 説］

参考書の例題として採用されそうな定型的な問題です。