1

解答解説のページへ

$\gamma=1+\sqrt{3}i$ とする。ただし, i は虚数単位である。実数 a, b に対して多項式 $P(x)$ を

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8(\sqrt{3}+1)x+16$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　$P(\gamma)=0$ となるように a と b を定めよ。

(2)　(1)で定めた a と b に対して, $P(x)=0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の点$(a,\ b)$で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ。$y=3x^2-6x$ で表される放物線を C とする。n を自然数とし，C 上の点$\mathrm{P}(n,\ 3n^2-6n)$をとる。原点を$\mathrm{O}(0,\ 0)$とする。C と線分 OP で囲まれる図形を D とする。ただし，D は境界を含むとする。$0\leqq k\leqq n$ を満たす整数 k に対して，直線 $x=k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を$f(k)$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(k)$を求めよ。

(2)　Dに含まれる格子点の総数を求めよ。

(3)　$f(k)$が最大になるようなkを求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 $t>0$ に対して, 座標平面上に点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$, 点 $\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$, 点 $\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ をとる。このとき, 以下の問いに答えよ。

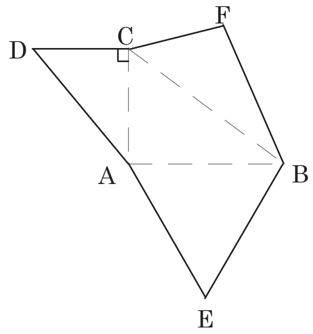
(1) P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ。

(2) (1)で求めた値を t_0 とする。$0<t<t_0$ のとき, 三角形△PQR の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$，$\angle ACD=90°$ で，$\triangle ABE$ は正三角形である。このとき, Vの体積を求めよ。



1

問題のページへ

(1) 実数係数の方程式$P(x)=0$の解の1つが$\gamma=1+\sqrt{3}i$より，$\overline{\gamma}=1-\sqrt{3}i$も解となり

$$\gamma+\overline{\gamma}=2,\ \gamma\overline{\gamma}=4$$

これより，$P(x)$をx^2-2x+4で割ると，

$$P(x)=(x^2-2x+4)\{x^2+(a+2)x+2a+b\}+(2b-8\sqrt{3}-16)x-8a-4b+16$$

すると，余りが0になることより，

$$2b-8\sqrt{3}-16=0\cdots\cdots\cdots①,\ -8a-4b+16=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$b=8+4\sqrt{3}$

②に代入して，$a=\dfrac{1}{2}(4-b)=-2-2\sqrt{3}$

(2) (1)より，$P(x)=(x^2-2x+4)(x^2-2\sqrt{3}x+4)$となり，$P(x)=0$の$x\neq\gamma$の解は，

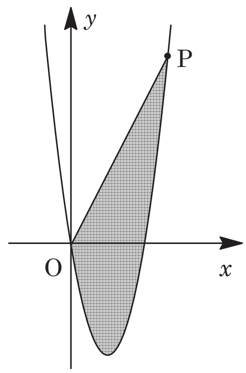
$$x=1-\sqrt{3}i,\ x=\sqrt{3}\pm i$$

［解 説］

複素数と方程式の基本問題ですので，計算ミスが致命傷になります。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　直線OP : $y=(3n-6)x$ より，$C : y=3x^2-6x$ と OP に囲まれた領域 D に含まれる $x=k$ 上の格子点の個数 $f(k)$ は,

$$f(k)=(3n-6)k-(3k^2-6k)+1$$
$$=-3k^2+3nk+1$$

(2)　D に含まれる格子点の総数 N は,

$$N=\sum_{k=0}^{n}(-3k^2+3nk+1)$$
$$=-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\{-n(2n+1)+3n^2+2\}=\frac{1}{2}(n+1)(n^2-n+2)$$

(3)　(1)より，$f(k)=-3\left(k-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2+1$ となり, n が整数から,

(i)　n が偶数のとき

$f(k)$ は，$k=\frac{n}{2}$ で最大となる。

(ii)　n が奇数のとき

$f(k)$ は，$k=\frac{n-1}{2}$，$\frac{n+1}{2}$ で最大となる。

［解 説］

格子点の個数を数える基本問題です。場合分けは発生しませんので，正確な計算力がすべてです。

3

問題のページへ

(1)　3 点 $P(t,\ 0)$，$Q(2t,\ 1-4t^2)$，$R(-t,\ 1-t^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{PQ}=(t,\ 1-4t^2),\ \ \overrightarrow{PR}=(-2t,\ 1-t^2)$$

P, Q, R が一直線上にある条件は, k を定数として，$\overrightarrow{PR}=k\overrightarrow{PQ}$

$$(-2t,\ 1-t^2)=k(t,\ 1-4t^2)$$

よって，$-2t=kt$ ……①，$1-t^2=k(1-4t^2)$ ……②

①より, $t>0$ なので，$k=-2$

②に代入して，$1-t^2=-2(1-4t^2)$ となり, $t>0$ から $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(2)　$0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，△PQR の面積 $S(t)$ は, (1)より,

$$S(t)=\frac{1}{2}\left|t(1-t^2)-(1-4t^2)(-2t)\right|=\frac{1}{2}\left|-9t^3+3t\right|$$

ここで，$f(t)=-9t^3+3t$ とおくと，

$$f'(t)=-27t^2+3=-3(3t+1)(3t-1)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$S(t)=\dfrac{1}{2}|f(t)|$ から，$S(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ をとる。

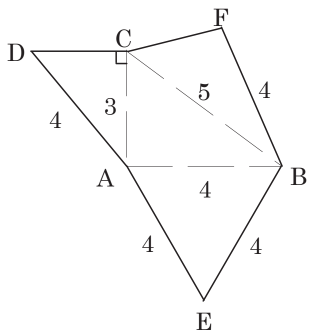
t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

［解　説］

図形と式の基本問題です。なお，三角形の面積 $S(t)$ は，公式を用いて立式しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ



右図において，AB＝4，AC＝3，BC＝5より，

$$\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$$

また，$\angle \mathrm{ACD} = 90^\circ$ より，

$$\mathrm{CD} = \mathrm{CF} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

さて，三角錐 V の底面△ABC を xy 平面上にとり，A$(0,\ 0,\ 0)$，B$(4,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 3,\ 0)$とする。さらに，Vのもう1つの頂点をP$(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$とおく。

すると，PA＝PB＝4，PC＝$\sqrt{7}$から，

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \cdots\cdots\cdots ①,\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 7 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②より，$8x - 16 = 0$，$x = 2 \cdots\cdots\cdots$④

②③より，$-4x + 3y = 1$となり，④を代入すると，$y = 3 \cdots\cdots\cdots$⑤

④⑤を①に代入すると，$z^3 = 3$となり，$z>0$から$z = \sqrt{3}$である。

以上より，三角錐Vの体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

［解　説］

底面が直角三角形であることに着目し，座標系を設定して処理しています。この解法がいちばん確実でしょう。