1　　解答解説のページへ

a を正の実数とし, 2 つの放物線

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$$

を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

A, B それぞれがさいころを 1 回ずつ投げる。

(i)　同じ目が出たときは A の勝ちとし，異なる目が出たときには大きい目を出した方の勝ちとする。

(ii)　p, q を自然数とする。A が勝ったときは，A が出した目の数の p 倍を A の得点とする。B が勝ったときには，B が出した目の数に A が出した目の数の q 倍を加えた合計を B の得点とする。負けた者の得点は 0 とする。

A の得点の期待値を E_A , B の得点の期待値を E_B とする。以下の問いに答えよ。

(1)　E_A ，E_B をそれぞれ p, q で表せ。

(2)　$E_A = E_B$ となる最小の自然数 p と，そのときの E_A の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を，次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\{a_1\},\ \{a_2,\ a_3,\ a_4\},\ \{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\},\ \cdots\cdots$$

第 1 群　　第 2 群　　　　　第 3 群

k を自然数として，以下の問いに答えよ。

(1)　第 k 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ。

(3)　$(k^2+1)S_k \leqq \dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。

4

解答解説のページへ

直角三角形 ABC において，$\angle C = \dfrac{\pi}{2}$，$AB = 1$ であるとする。$\angle B = \theta$ とおく。点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし，点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす。AE と CD の交点を F とする。

(1)　$\dfrac{DE}{AC}$ を θ で表せ。

(2)　$\triangle FEC$ の面積を θ で表せ。

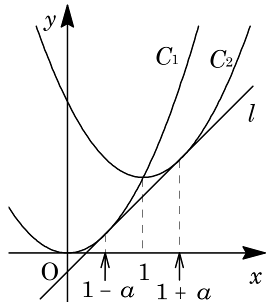
1

問題のページへ

(1) 放物線 $C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ ……②に対して，

①より，$y' = 2x$ となり，接点 $(t,\ t^2)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \ \cdots\cdots③$$



②③を連立して，$x^2 - 4ax + 4a = 2tx - t^2$

$$x^2 - 2(2a + t)x + 4a + t^2 = 0 \ \cdots\cdots④$$

放物線②と接線③が接することより，④は重解をもち，

$$D/4 = (2a + t)^2 - (4a + t^2) = 0,\quad a^2 + at - a = 0$$

$a > 0$ から，$a + t - 1 = 0$，$t = 1 - a$ ………⑤

③に代入すると，接線 l の方程式は，

$$y = 2(1 - a)x - (1 - a)^2$$

(2) ④の重解は，⑤より，$x = 2a + t = 2a + 1 - a = 1 + a$

また，①と②の交点は，$x^2 = x^2 - 4ax + 4a$ より，$x = 1$

よって，C_1，C_2 と l で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_{1-a}^{1} \{x - (1 - a)\}^2 dx + \int_{1}^{1+a} \{x - (1 + a)\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 - a)\}^3\Big]_{1-a}^{1} + \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 + a)\}^3\Big]_{1}^{1+a}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$$

［解 説］

よく見かける構図で，過去に多数の大学で出題されてきた頻出問題です。

2

問題のページへ

(1) A, B の出した目の数と得点との対応をまとめると, 右表のようになる。

a \ b	1	2	3	4	5	6
1	p	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$	$q+6$
2	$2p$	$2p$	$2q+3$	$2q+4$	$2q+5$	$2q+6$
3	$3p$	$3p$	$3p$	$3q+4$	$3q+5$	$3q+6$
4	$4p$	$4p$	$4p$	$4p$	$4q+5$	$4q+6$
5	$5p$	$5p$	$5p$	$5p$	$5p$	$5q+6$
6	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$	$6p$

なお, 太い折れ線より下側の数値が A の得点, 上側の数値が B の得点である。得点 0 は省略している。

また, 各得点をとる確率は, いずれも $\dfrac{1}{36}$ である。

これより, A の得点の期待値 E_A は,

$$E_A=(p+2p\times2+3p\times3+4p\times4+5p\times5+6p\times6)\times\frac{1}{36}=\frac{91}{36}p$$

B の得点の期待値 E_B は,

$$E_B=(q+2+q+3+\cdots+q+6+2q+3+\cdots+5q+6)\times\frac{1}{36}=\frac{35q+70}{36}$$

(2) $E_A=E_B$ から, $\dfrac{91}{36}p=\dfrac{35q+70}{36}$ となり, $13p=5(q+2)\cdots\cdots\cdots(*)$

自然数 p, q に対して, $(*)$より $13p$ は 5 の倍数となり, 13 と 5 は互いに素から p は 5 の倍数となる。

よって, p の最小数は $p=5$ であり, $(*)$から $q=11$ となり適する。

また, このとき, $E_A=\dfrac{455}{36}$ である。

［解　説］

第 1 問に続き, センター試験レベルの問題です。上記のように, すべての場合を表にまとめると, ミスが少ないでしょう。

3

問題のページへ

(1)　まず，第 k 項の末項までの項数は，$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

これより，第 k 群の初項は，$(k-1)^2+1=k^2-2k+2$ 項目となるので，

$$a_{k^2-2k+2}=\frac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$$

(2)　第 k 群の初項は a_{k^2-2k+2}，第 k 群の末項は a_{k^2} より，第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k は，

$$S_k=\sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}a_n=\sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2+1}=\frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$$

(3)　$(k^2+1)S_k\leqq\dfrac{1}{100}$ より，$\dfrac{2k-1}{k^2-2k+2}\leqq\dfrac{1}{100}$ となり，

$$k^2-202k+102\geqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(k)=k^2-202k+102$ とおくと，$f(k)=(k-101)^2-101^2+102$ より，

$$f(202)=f(0)=102>0,\ f(201)=f(1)=-99<0$$

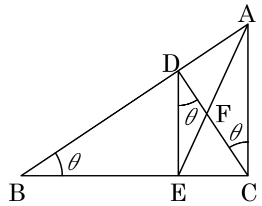
よって，$(*)$を満たす最小の自然数 k は，$k=202$ である。

［解　説］

(1)と(2)は群数列の基本題です。(3)は結論を予想し，2 次関数 $f(k)$ のグラフの軸が $k=101$ であることに注目して解いています。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　条件より，$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\sin\theta=\sin\theta$ となり，

$$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$$

$$\mathrm{DE}=\mathrm{CD}\cos\theta=\cos^2\theta\sin\theta$$

よって，$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AC}}=\cos^2\theta$

(2)　DE // AC より, (1)から,

$$\mathrm{EF}:\mathrm{FA}=\mathrm{DE}:\mathrm{AC}=\cos^2\theta:1$$

よって，$\triangle\mathrm{FEC}=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+1}\triangle\mathrm{AEC}$ ………①

ここで，$\mathrm{EC}=\mathrm{CD}\sin\theta=\sin^2\theta\cos\theta$ から，

$$\triangle\mathrm{AEC}=\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta \text{ ………②}$$

①②より，$\triangle\mathrm{FEC}=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta+1}\cdot\dfrac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta=\dfrac{\sin^3\theta\cos^3\theta}{2(\cos^2\theta+1)}$

［解　説］

三角比の基本題です。自然な流れで解を作っています。