1

解答解説のページへ

実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[\,x\,]$ で表す。たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\,\dfrac{5}{2}\,\right]=2$，$[\,-2.1\,]=-3$ である。

(1)　$n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2)　$[\,x\,]^2-5[\,x\,]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-5[\,x\,]+5=0$ を満たす x をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数，b と c を実数とし，2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$，$\mathrm{Q}(1,\ 4)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C とおく。C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　b の値を求め, c を a で表せ。

(2)　l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3)　放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とし, xy 平面上の 3 直線を

$$l : x+y=0\ ,\ \ l_1 : ax+y=2a+2\ ,\ \ l_2 : bx+y=2b+2$$

で定める。

(1)　直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2)　l , l_1 , l_2 によって三角形がつくられるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(3)　$a,\ b$ は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような $a,\ b$ の範囲を求め, それを ab 平面上に図示せよ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　s_2 を求めよ。

(2)　s_3 と a_3 を求めよ。

(3)　s_4 と a_4 を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$n^2-5n+5<0$ ……①より，$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<n<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ となり，$2<\sqrt{5}<3$ から，

$$1<\frac{5-\sqrt{5}}{2}<\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}<\frac{5+\sqrt{5}}{2}<4$$

よって，①を満たす整数 n は，$n=2,\ 3$

(2)　$[\,x\,]=n$ とおくと，$[\,x\,]^2-5[\,x\,]+5<0$ は①と一致するので, (1)より，$[\,x\,]=2,\ 3$

よって，$2\leqq x<4$

(3)　$2\leqq x<4$ のとき，$x^2-5[\,x\,]+5=0$ ……②に対して,

(i)　$[\,x\,]=2$ $(2\leqq x<3)$ のとき

②より，$x^2-10+5=0$ となり，$2\leqq x<3$ から，$x=\sqrt{5}$

(ii)　$[\,x\,]=3$ $(3\leqq x<4)$ のとき

②より，$x^2-15+5=0$ となり，$3\leqq x<4$ から，$x=\sqrt{10}$

(i)(ii)より，$x=\sqrt{5},\ \sqrt{10}$

［解　説］

ガウス記号を題材としていますが，内容は与えられた定義の理解を問うものです。

2

問題のページへ

(1)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ が，2 点 P$(-1,\ 3)$，Q$(1,\ 4)$ を通るので，

$$a-b+c=3\cdots\cdots\cdots①,\quad a+b+c=4\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=\dfrac{1}{2}$ となり，また $a+c=\dfrac{7}{2}$ から，$c=\dfrac{7}{2}-a$

(2)　(1)より，$y=ax^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}-a$ となり，$y'=2ax+\dfrac{1}{2}$

点 P における C の接線 l_1 は，

$$y-3=\left(-2a+\frac{1}{2}\right)(x+1),\quad y=\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

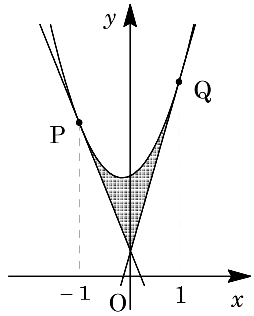
点 Q における C の接線 l_2 は，

$$y-4=\left(2a+\frac{1}{2}\right)(x-1),\quad y=\left(2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=0$，$y=-2a+\dfrac{7}{2}$

よって，l_1 と l_2 の交点の座標は，$\left(0,\ -2a+\dfrac{7}{2}\right)$ である。

(3)　放物線 C と接線 l_1 は $x=-1$ で接し，C と l_2 は $x=1$ で接していることに留意すると，放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\int_{-1}^{0}a(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}a(x-1)^2dx$$
$$=\frac{a}{3}\Big[(x+1)^3\Big]_{-1}^{0}+\frac{a}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_{0}^{1}$$
$$=\frac{a}{3}+\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a$$

すると，条件から $\dfrac{2}{3}a=1$ より，$a=\dfrac{3}{2}$ である。

［解　説］

放物線と接線に関する典型題の 1 つです。計算も複雑ではありません。

3

問題のページへ

(1)　直線 $l_1 : ax+y=2a+2$ は，$y=-a(x-2)+2$ より，どんな a の値に対しても，点 $(2,\ 2)$ を通る。よって，$\mathrm{P}(2,\ 2)$ である。

(2)　直線 $l_2 : bx+y=2b+2$ は，$y=-b(x-2)+2$ より，どんな b の値に対しても，点 $\mathrm{P}(2,\ 2)$ を通るので，l_1，l_2 の交点は $\mathrm{P}(2,\ 2)$ である。すると，直線 $l : x+y=0$ は点 P を通らないことから，3 直線 l，l_1，l_2 が同一点で交わる場合はない。

そこで，3 直線 l，l_1，l_2 によって三角形がつくられるための条件は，

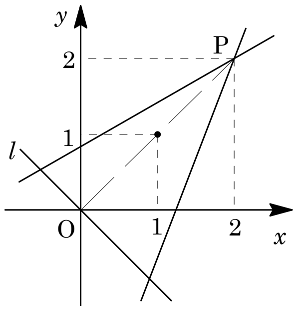
(i)　l と l_1 が平行でないとき　$-a\neq-1$ より，$a\neq1$

(ii)　l と l_2 が平行でないとき　$-b\neq-1$ より，$b\neq1$

(iii)　l_1 と l_2 が平行でないとき　$-a\neq-b$ より，$a\neq b$

(i)～(iii)より，求める $a,\ b$ の条件は，

$$a\neq1,\ b\neq1,\ a\neq b$$



(3)　(2)のとき，点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にある条件は，図より，l と l_1 の交点，l と l_2 の交点が，一方は第 2 象限，もう一方は第 4 象限に位置することである。

l と l_1 の交点は，$ax-x=2a+2$ から，$x=\dfrac{2a+2}{a-1}$

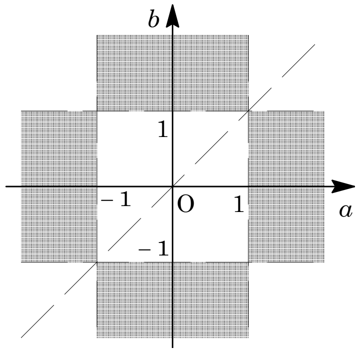
l と l_2 の交点は，$bx-x=2b+2$ から，$x=\dfrac{2b+2}{b-1}$

よって，求める条件は，$\dfrac{2a+2}{a-1}\cdot\dfrac{2b+2}{b-1}<0$

両辺に $(a-1)^2(b-1)^2$ をかけると，

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)<0$$

この領域を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

定点を通過する直線についての基本的な問題です。なお，(3)において，分数不等式を変形するときに，分母を 2 乗した式を両辺にかけるという技法は必須です。

4

問題のページへ

(1)　1番の箱には，q 個の白玉と r 個の赤玉が入っている。この $q+r$ 個の玉の中から1個の玉を取り出して2番の箱に移す再配分の総数 s_2 は，$s_2=q+r$ である。

(2)　(1)より，1番の箱から2番の箱には $q+r$ 通りの移動方法があり，次に2番の箱から3番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法がある。これより，再配分の総数 s_3 は，

$$s_3=(q+r)(q+r+1)$$

また，3番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分には，1番の箱から2番に赤玉を移し2番から3番に白玉を移す場合と，1番の箱から2番に白玉を移し2番から3番に白玉を移す場合がある。その総数 a_3 は，

$$a_3=r\times q+q(q+1)=q(q+r+1)$$

(3)　(2)と同様にして，1番の箱から2番の箱には $q+r$ 通りの移動方法，次に2番の箱から 3 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法，さらに 3 番の箱から 4 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法がある。これより，再配分の総数 s_4 は，

$$s_4=(q+r)(q+r+1)^2$$

また，4番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分には，1番の箱から2番，2番の箱から3番，3番の箱から4番に移る玉で場合分けをすると，

(i)　赤玉→赤玉→白玉のとき　$r(r+1)q$ 通りの移動方法

(ii)　赤玉→白玉→白玉のとき　$rq(q+1)$ 通りの移動方法

(iii)　白玉→赤玉→白玉のとき　$qrq=q^2r$ 通りの移動方法

(iv)　白玉→白玉→白玉のとき　$q(q+1)^2$ 通りの移動方法

(i)～(iv)より，再配分の総数を a_4 は，

$$\begin{aligned}a_4&=r(r+1)q+rq(q+1)+q^2r+q(q+1)^2\\&=q(r^2+r+rq+r+qr+q^2+2q+1)=q(q+r+1)^2\end{aligned}$$

［解　説］

場合の数の問題というよりは，読解力を試すものです。我慢強く，問題文をていねいに読まなくてはいけません。