1

解答解説のページへ

実数 x に対して$k \leqq x < k+1$を満たす整数 k を$[x]$で表す。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$である。

(1)　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$を満たす整数nをすべて求めよ。

(2)　$[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$を満たす実数xの範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$を満たす x をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，以下の 3 つの条件を考える。

(i)　$a+d=ad-bc=0$

(ii)　$A^2=O$

(iii) ある自然数 n に対して $A^n=O$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　(i)ならば(ii)であることを示せ。

(2)　(iii)ならば $ad-bc=0$ であることを示せ。

(3)　(iii)ならば(i)であることを示せ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，$a,\ b,\ c$ の満たす条件を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　a_2，a_3 を求めよ。

(2)　s_n を求めよ。

(3)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(4)　a_n を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1)　$F'(x)$ を求めよ。

(2)　$F'(x)\leqq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$n^2-n-\frac{5}{4}<0$ ……①より，$\frac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\frac{1+\sqrt{6}}{2}$ となり，$2<\sqrt{6}<3$ から，

$$-1<\frac{1-\sqrt{6}}{2}<-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}<\frac{1+\sqrt{6}}{2}<2$$

よって，①を満たす整数 n は，$n=0,\ 1$

(2)　$[\,x\,]=n$ とおくと，$[\,x\,]^2-[\,x\,]-\frac{5}{4}<0$ は①と一致するので, (1)より，$[\,x\,]=0,\ 1$

よって，$0\leqq x<2$

(3)　$0\leqq x<2$ のとき，$x^2-[\,x\,]-\frac{5}{4}=0$ ……②に対して，

(i)　$[\,x\,]=0$ $(0\leqq x<1)$ のとき

②より，$x^2-\frac{5}{4}=0$ となるが，$0\leqq x<1$ から解なし。

(ii)　$[\,x\,]=1$ $(1\leqq x<2)$ のとき

②より，$x^2-\frac{9}{4}=0$ となり，$1\leqq x<2$ から，$x=\frac{3}{2}$

(i)(ii)より，$x=\frac{3}{2}$

［解 説］

ガウス記号を題材としていますが，内容は与えられた定義の理解を問うものです。文系に数値だけを変更した類題があります。

2

問題のページへ

(1) $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$とするとき，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$に対して，

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$a+d=ad-bc=0$のとき，①より，$A^2=O$となる。

(2) ある自然数nに対して$A^n=O$のとき，$ad-bc\neq 0$とすると，A^{-1}が存在し，

$$A^{-1}A^n=A^{-1}O,\ A^{n-1}=O$$

同様にして，A^{-1}を左からかけていくと，$E=O$となり矛盾が生じる。

よって，A^{-1}は存在しないことから，$ad-bc=0$である。

(3) ある自然数nに対して$A^n=O$のとき, (2)より$ad-bc=0$なので，①から，

$$A^2=(a+d)A\cdots\cdots\cdots②$$

②より，帰納的に，$A^n=(a+d)^{n-1}A$

すると，$A^n=O$から，$a+d=0$または$A=O$となり，このいずれの場合も，②より，$A^2=O$である。

［解 説］

べき零行列に関する有名な頻出問題です。誘導のない出題も，しばしば見かけます。

3

問題のページへ

(1) 原点 $O(0,\ 0)$ を通る円の方程式を，$x^2+y^2+ax+by=0$ ……①とおく。

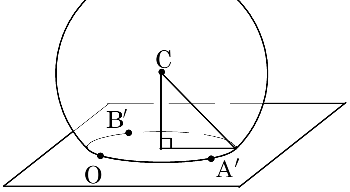
①が $A(2,\ 1)$，$B(1,\ 2)$ を通ることより，

$$5+2a+b=0 \cdots\cdots②,\quad 5+a+2b=0 \cdots\cdots③$$

②③より，$a=b=-\frac{5}{3}$ となるので，3 点 O, A, B を通る円の方程式は，①より，

$$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0,\quad \left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{18} \cdots\cdots④$$

(2) 3 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A'(2,\ 1,\ 0)$，$B'(1,\ 2,\ 0)$ を通る球面 S は，(1)から，xy 平面との交線が④で表されることより，その中心を $C\left(\frac{5}{6},\ \frac{5}{6},\ c\right)$ とおくことができる。



さて，S の半径を r とすると，三平方の定理から，

$$r^2=c^2+\frac{25}{18}$$

よって，S の方程式は，$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2=c^2+\frac{25}{18}$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y-2cz=0 \cdots\cdots⑤$$

そこで，直線 $l: x=t+2,\ y=t+2,\ z=t$ と S の方程式⑤を連立して，

$$(t+2)^2+(t+2)^2+t^2-\frac{5}{3}(t+2)-\frac{5}{3}(t+2)-2ct=0$$

$$3t^2-\left(2c-\frac{14}{3}\right)t+\frac{4}{3}=0 \cdots\cdots⑥$$

条件より，⑥が実数解をもつので，$D/4=\left(c-\frac{7}{3}\right)^2-4\geqq 0$ となり，

$$\left(c-\frac{7}{3}+2\right)\left(c-\frac{7}{3}-2\right)\geqq 0,\quad \left(c-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{13}{3}\right)\geqq 0$$

以上より，求める $C(a,\ b,\ c)$ の条件は，$a=b=\frac{5}{6}$ で，$c\leqq\frac{1}{3}$，$\frac{13}{3}\leqq c$ である。

［解　説］

現行課程ではあまり重視されていない部分ですが，球面と平面や直線の交わりについての基本的な問題です。演習しておくことが望まれる一題です。

4

問題のページへ

(1) q 個の白玉と r 個の赤玉が入っている 1 番の箱から 2 番に白玉を移すと，2 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分になり，その総数 a_2 は $a_2=q$ である。

また，3 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分には，1 番の箱から 2 番に赤玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合と，1 番の箱から 2 番に白玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合がある。その総数 a_3 は，

$$a_3=r\times q+q(q+1)=q(q+r+1)$$

(2) 1 番の箱から 2 番の箱には $q+r$ 通りの移動方法，次に 2 番の箱から 3 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法，さらに 3 番の箱から 4 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法，…，$n-1$ 番の箱から n 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法がある。これより，再配分の総数 s_n は，$s_n=(q+r)(q+r+1)^{n-2}$ である。

なお，この式は，$n=2$ のときも成立する。

(3) n 番の箱には，$q+1$ 個の白玉と r 個の赤玉が入っている場合が a_n 通り，q 個の白玉と $r+1$ 個の赤玉が入っている場合が s_n-a_n 通りあることより，n 回目の操作を行った後，$n+1$ 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数 a_{n+1} は，

$$a_{n+1}=(q+1)a_n+q(s_n-a_n)=a_n+qs_n=a_n+q(q+r)(q+r+1)^{n-2}$$

よって，$a_{n+1}-a_n=q(q+r)(q+r+1)^{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$

(4) $a_2=q$ であるので，$(*)$から，$n\geqq 3$ において，

$$a_n=a_2+\sum_{k=2}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=q+q(q+r)\sum_{k=2}^{n-1}(q+r+1)^{k-2}$$

$$=q+q(q+r)\cdot\frac{(q+r+1)^{n-2}-1}{(q+r+1)-1}=q(q+r+1)^{n-2}$$

なお，この式は，$n=2$ のときも成立する。

［解 説］

場合の数の問題というよりは，読解力を試すものです。我慢強く，問題文をていねいに読まなくてはいけません。なお，文系では，s_2，s_3，s_4 および a_3，a_4 を求めるという内容になっています。

5

問題のページへ

(1)　$f(\theta)=\sqrt{1-\cos\theta}$ とおくと，$F(x)=\int_x^{x+a} f(\theta)d\theta$ となり，

$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=\sqrt{1-\cos(x+a)}-\sqrt{1-\cos x}$$

(2)　$F'(x)\leqq 0$ より，$\sqrt{1-\cos(x+a)}\leqq\sqrt{1-\cos x}$ となり，両辺を 2 乗して，

$$1-\cos(x+a)\leqq 1-\cos x,\ \cos(x+a)-\cos x\geqq 0,\ -2\sin\frac{2x+a}{2}\sin\frac{a}{2}\geqq 0$$

ここで，$0<a<2\pi$ より，$\sin\frac{a}{2}>0$ であるので，$\sin\frac{2x+a}{2}\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，$0<x<2\pi$ から $\frac{a}{2}<\frac{2x+a}{2}<2\pi+\frac{a}{2}$ となり，$0<\frac{a}{2}<\pi$ に留意して，$(*)$を満たす x の範囲を求めると，

$$\pi\leqq\frac{2x+a}{2}\leqq 2\pi,\ \pi-\frac{a}{2}\leqq x\leqq 2\pi-\frac{a}{2}$$

(3)　$F(x)=\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=\int_x^{x+a}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\sqrt{2}\int_x^{x+a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

ここで，$\frac{\theta}{2}=\varphi$ とおくと，$d\theta=2d\varphi$ となり，$F(x)=2\sqrt{2}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+a}{2}}|\sin\varphi|d\varphi$

さて，(2)より $F(x)$ の増減は右表のようになり，$F(x)$ は $x=\pi-\frac{a}{2}$ のとき極大，$x=2\pi-\frac{a}{2}$ のとき極小となる。

x	0	$\cdots$	$\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$2\pi-\frac{a}{2}$	$\cdots$	2π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

極大値は，$F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{a}{4}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}=-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}\right)=4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}$$

極小値は，$F\left(2\pi-\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\int_{\pi-\frac{a}{4}}^{\pi+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_0^{\frac{a}{4}}=4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)$$

［解　説］

定積分の計算問題です。(1)と(2)の誘導に従えば，方針に迷うことはありません。なお，極大値と極小値の計算では，三角関数の周期性を利用しています。