1

解答解説のページへ

$m>0$, $n>0$, $0<x<1$ とする。△OAB の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P, 辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする。また, 線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S, 線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, m, n, x で表せ。

(2) 3 点 O, S, T が一直線上にあるとき, x を m, n で表せ。

2

解答解説のページへ

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x = \sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$，$\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ がある。不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D, 不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域を E とする。

(1) 点 C が領域 D に含まれ, 点 A と点 B が領域 E に含まれるような $a,\ b$ の条件を連立不等式で表せ。

(2) (1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ。

(3) (2)で求めた領域 F の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

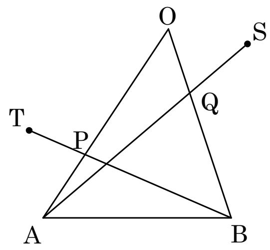
(1)　P_2 を p と q で表せ。

(2)　P_3 を p と q で表せ。

(3)　$\frac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_3<P_2$ であることを示せ。

1

問題のページへ



(1)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{m}{m+n}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{n}{m+n}\vec{b}$

線分 AQ を$1:x$に外分する点が S より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{-x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{1-x}=\frac{-x}{1-x}\vec{a}+\frac{n}{(1-x)(m+n)}\vec{b}$$

(2)　線分 BP を$1:x$に外分する点が T より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{-x\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1-x}=\frac{m}{(1-x)(m+n)}\vec{a}-\frac{x}{1-x}\vec{b}$$

3 点 O, S, T が一直線上にある条件は, k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ から,

$$\frac{-x}{1-x}\vec{a}+\frac{n}{(1-x)(m+n)}\vec{b}=\frac{km}{(1-x)(m+n)}\vec{a}-\frac{kx}{1-x}\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので,

$$\frac{-x}{1-x}=\frac{km}{(1-x)(m+n)}\cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{n}{(1-x)(m+n)}=-\frac{kx}{1-x}\cdots\cdots\cdots②$$

①より $-x(m+n)=km$ となり，$k=\dfrac{-x(m+n)}{m}\cdots\cdots\cdots③$

②より $n=-kx(m+n)$ となり，③を代入すると,

$$n=\frac{x^2(m+n)^2}{m},\quad x^2=\frac{mn}{(m+n)^2}$$

よって，$x=\dfrac{\sqrt{mn}}{m+n}$ となる。なお，この値は $0<x<1$ を満たしている。

［解 説］

平面ベクトルの基本問題です。最後の $0<x<1$ についてはは触れているだけですが，これを示すには，相加平均と相乗平均の関係を用いると簡明です。

2

問題のページへ

(1)　条件より，$f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ なので,

$$f(\theta)=4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta+3\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta$$
$$=-8\sin^3\theta-6\sqrt{2}\sin^2\theta+3\sqrt{2}$$

ここで，$x=\sin\theta$ とおくと，$f(\theta)=-8x^3-6\sqrt{2}x^2+3\sqrt{2}$

(2)　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-1\leqq x\leqq 1$ となり，$f(\theta)=g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=-24x^2-12\sqrt{2}x$$
$$=-12x(2x+\sqrt{2})$$

すると，$g(x)$ の値の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	

ここで，$g(-1)=8-3\sqrt{2}$ であり，$8-3\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ から $f(\theta)=g(x)$ の最大値は $3\sqrt{2}$ である。このとき，$x=\sin\theta=0$ から $\theta=0$ となる。

また，$g(1)=-8-3\sqrt{2}$ であり，$f(\theta)=g(x)$ の最小値は $-8-3\sqrt{2}$ である。このとき，$x=\sin\theta=1$ から $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

［解　説］

微分の応用の基本問題です。計算ミスをすると致命傷になります。

3　　　問題のページへ

(1)　$\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ が領域 $D: y \geqq x^2$ に含まれることより，

$$b+2 \geqq (a+1)^2,\ b \geqq (a+1)^2-2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$ が領域 $E: y \leqq x^2$ に含まれることより，

$$b \leqq a^2 \cdots\cdots\cdots ②,\ b \leqq (a+3)^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

したがって，求める a, b の条件は，①②③である。

(2)　①②の境界線の交点は，

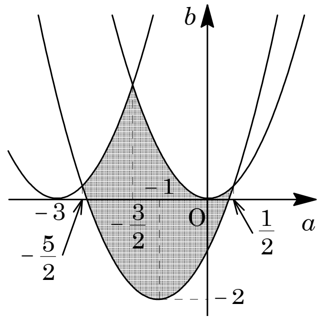
$$(a+1)^2-2=a^2,\ 2a-1=0$$

よって，$a=\frac{1}{2}$ から，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$

また，①③の境界線の交点は，

$$(a+1)^2-2=(a+3)^2,\ 4a+10=0$$

よって，$a=-\frac{5}{2}$ から，点 $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{1}{4}\right)$



以上より，①②③で表される領域 F は右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

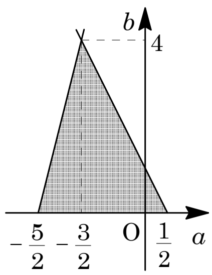
(3)　領域 F の面積を S とすると，

$$S=\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}}\left\{(a+3)^2-(a+1)^2+2\right\}da+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{a^2-(a+1)^2+2\right\}da$$

$$=\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}}(4a+10)da+\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}(-2a+1)da$$

すると，S は右図の網点部の面積となり，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot 4=6$$



［解　説］

積分と面積の基本問題です。積分値の計算は，三角形の面積を対応させていますが，普通に計算しても構いません。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　A が B より先に 2 勝する場合は，A が 2 連勝のとき，または A が 1 勝 1 敗で 3 試合目に A が勝つときより，その確率 P_2 は,

$$P_2 = p^2 + {}_2\mathrm{C}_1 pq\cdot p = p^2 + 2p^2q = p^2(1+2q)$$

(2)　A が B より先に 3 勝する場合は，A が 3 連勝のとき，または A が 2 勝 1 敗で 4 試合目に A が勝つとき，または A が 2 勝 2 敗で 5 試合目に A が勝つときである。

すると，その確率 P_3 は,

$$P_3 = p^3 + {}_3\mathrm{C}_2 p^2q\cdot p + {}_4\mathrm{C}_2 p^2q^2\cdot p = p^3 + 3p^3q + 6p^3q^2 = p^3(1+3q+6q^2)$$

(3)　$p+q=1$ から，$p=1-q$ となり，

$$\begin{aligned} P_2 - P_3 &= p^2(1+2q) - p^3(1+3q+6q^2) = p^2\{1+2q-(1-q)(1+3q+6q^2)\} \\ &= p^2(6q^3-3q^2) = 3p^2q^2(2q-1) \end{aligned}$$

すると，$\dfrac{1}{2} < q < 1$ から $P_2 - P_3 > 0$ となり，$P_3 < P_2$ である。

［解　説］

確率の基本問題です。問題文の設定から，文系風にアレンジした跡が読み取れます。