1

解答解説のページへ

k は実数, a, b, c, d は $ad-bc=1$ を満たす実数とする。行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す移動は以下の 3 条件を満たすとする。

(イ)　直線 $y=x$ 上の点は直線 $y=x$ 上の点に移る。

(ロ)　直線 $y=-x$ 上の点は直線 $y=-x$ 上の点に移る。

(ハ)　x 軸上の点は直線 $y=kx$ 上の点に移る。

(1)　k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　A を k で表せ。

2

解答解説のページへ

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x = \sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

(3)　方程式 $f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，$x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ を示せ。

(2) $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \dfrac{x^3}{3}$ を示せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a, b に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ とおく。

(1)　$a \neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2)　(1)で求めた c について，a, b が条件 $a<c<b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

(3)　一般に $a<b$ のとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

(1)　P_2 を p と q で表せ。

(2)　P_3 を p と q で表せ。

(3)　P_4 を p と q で表せ。

(4)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　まず，条件より，$ad-bc=1$ ………①

さて，直線 $y=x$ 上の点を $(t,\ t)$ とすると，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+b)t \\ (c+d)t \end{pmatrix}$

条件(イ)より，$(c+d)t=(a+b)t$ となり，この式が任意の t で成り立つので，

$c+d=a+b$ ………②

また，直線 $y=-x$ 上の点を $(s,\ -s)$ とすると，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ -s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-b)s \\ (c-d)s \end{pmatrix}$

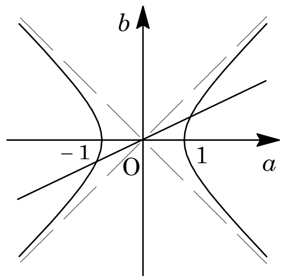
条件(ロ)より，$(c-d)s=-(a-b)s$ となり，この式が任意の s で成り立つので，

$c-d=-a+b$ ………③

さらに，x 軸上の点を $(u,\ 0)$ とすると，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} au \\ cu \end{pmatrix}$

条件(ハ)より，$cu=kau$ となり，この式が任意の u で成り立つので，

$c=ka$ ………④



②③より，$d=a$，$c=b$ となり，①に代入すると，

$a^2-b^2=1$ ………⑤

④に代入すると，$b=ka$ ………⑥

k のとりうる値の範囲は，⑤⑥が共有点をもつ条件として求められ，双曲線⑤の漸近線が $y=\pm x$ から，

$-1<k<1$

(2)　⑤⑥より，$a^2-k^2a^2=1$ から，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$，$b=\pm\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ （複号同順）

よって，$d=a$，$c=b$ から，$A=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$

［解 説］

1 次変換の基本問題です。(1)の後半は図形処理をしていますが，最初に考えた通りを記したにすぎません。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　条件より，$f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ なので，

$$f(\theta)=4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta+3\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta$$
$$=-8\sin^3\theta-6\sqrt{2}\sin^2\theta+3\sqrt{2}$$

ここで，$x=\sin\theta$ とおくと，$f(\theta)=-8x^3-6\sqrt{2}x^2+3\sqrt{2}$

(2)　$-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より $-1\leqq x\leqq 1$ となり，$f(\theta)=g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=-24x^2-12\sqrt{2}x$$
$$=-12x(2x+\sqrt{2})$$

すると，$g(x)$ の値の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	

ここで，$g(-1)=8-3\sqrt{2}$ であり，$8-3\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ から $f(\theta)=g(x)$ の最大値は $3\sqrt{2}$ である。このとき，$x=\sin\theta=0$ から $\theta=0$ となる。

また，$g(1)=-8-3\sqrt{2}$ であり，$f(\theta)=g(x)$ の最小値は $-8-3\sqrt{2}$ である。このとき，$x=\sin\theta=1$ から $\theta=\frac{\pi}{2}$ となる。

(3)　$x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ より，$-1\leqq x\leqq 1$ を満たす x と $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす θ は，1 対 1 の対応をする。

これより，方程式 $f(\theta)=k$ が $-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ に相異なる 3 つの解をもつ条件は，$g(x)=k$ が $-1\leqq x\leqq 1$ に相異なる 3 つの解をもつ条件に等しい。

すなわち，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が 3 つの共有点をもつ条件より，(2)の増減表から，$2\sqrt{2}<k\leqq 8-3\sqrt{2}$ である。

［解 説］

微分の応用の基本問題です。計算ミスをすると致命傷になります。(3)も 1 対 1 の対応なので，ややこしくありません。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　$f(x)=x-\sin x$ とおくと，$f'(x)=1-\cos x\geqq 0$ から，$x\geqq 0$ のとき，

$$f(x)\geqq f(0)=0,\ \sin x\leqq x$$

$g(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ とおくと，$g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$，$g''(x)=-\sin x+x$

$x\geqq 0$ のとき，$\sin x\leqq x$ から，$g''(x)\geqq 0$ となり，$x\geqq 0$ のとき，

$$g'(x)\geqq g'(0)=0$$

これより，$x\geqq 0$ のとき，$g(x)\geqq g(0)=0$ となり，$x-\dfrac{x^3}{6}\leqq\sin x$

(2)　(1)より，$t\geqq 0$ において，$t-\dfrac{t^3}{6}\leqq\sin t\leqq t$ から，$t^2-\dfrac{t^4}{6}\leqq t\sin t\leqq t^2$………①

$x\geqq 0$ として，①の各辺を 0 から x まで積分すると，

$$\int_0^x\left(t^2-\frac{t^4}{6}\right)dt\leqq\int_0^x t\sin t\,dt\leqq\int_0^x t^2dt$$

よって，$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}\leqq\displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt\leqq\dfrac{x^3}{3}$………②

(3)　$\displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt=-\Big[t\cos t\Big]_0^x+\int_0^x\cos t\,dt=-x\cos x+\Big[\sin t\Big]_0^x=\sin x-x\cos x$

②より，$x\geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30}\leqq\sin x-x\cos x\leqq\dfrac{x^3}{3}$ となり，$x>0$ において，

$$\frac{1}{3}-\frac{x^2}{30}\leqq\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\leqq\frac{1}{3}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$ となる。

また，$x<0$ のとき，$t=-x>0$ とおくと，

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)-(-t)\cos(-t)}{(-t)^3}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t-t\cos t}{t^3}=\frac{1}{3}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$

［解　説］

(2)と(3)は，一ひねりがあると思ったのですが，その予想に反し，そのまま計算すればよいだけでした。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ に対して，$f(c)=g(c)$ より，

$$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a,\ 2(a-b)c=-a+b$$

$a\neq b$ より，$c=-\frac{1}{2}$

(2)　$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$ より，$f(x)<0$ が解をもつ条件は，$-a^2+b<0$ ……①であり，このとき，$f(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<a<\beta)$ とおくと，$f(x)<0$ の解は，$\alpha<x<\beta$ となる。

$g(x)=(x-b)^2-b^2+a$ より，$g(x)<0$ が解をもつ条件は，$-b^2+a<0$ ……②であり，このとき，$g(x)=0$ の解を $x=\gamma,\ \delta\ (\gamma<b<\delta)$ とおくと，$g(x)<0$ の解は，$\gamma<x<\delta$ となる。

さて，$a<-\frac{1}{2}<b$ のとき，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+a+b$ であり，①②のもとで，

(i)　$\frac{1}{4}+a+b>0$ のとき

$\alpha<a<\beta<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(ii)　$\frac{1}{4}+a+b=0$ のとき

$\alpha<a<\beta=-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}=\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(iii)　$\frac{1}{4}+a+b<0$ のとき

$\alpha<a<-\frac{1}{2}<\beta$，$\gamma<-\frac{1}{2}<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもち，その解は $\gamma<x<\beta$ である。

(i)～(iii)より，求める条件は，$\frac{1}{4}+a+b<0$ である。

(3)　$a<b$ のとき，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつ条件は，

(i)　$a<-\frac{1}{2}<b$ のとき　(2)より，$\frac{1}{4}+a+b<0$

(ii)　$-\frac{1}{2}\leqq a<b$ のとき

まず，①より，$b<a^2$ が必要である。逆に，このとき，

$$f(a)-g(a)=-a^2+b-(a^2-2ab+a)=2a(-a+b)+b-a$$
$$=(b-a)(2a+1)\geqq 0$$

これより，$g(a)\leqq f(a)<0$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は，解 $x=a$ をもつ。

よって，求める条件は，$b<a^2$ である。

(iii)　$a<b\leqq -\frac{1}{2}$ のとき

まず，②より，$a<b^2$ が必要である。逆に，このとき，

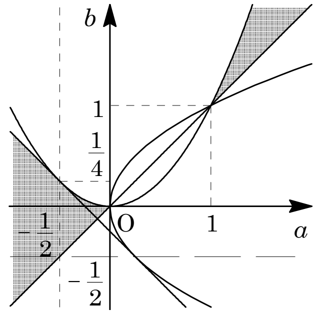
$$g(b)-f(b)=-b^2+a-(b^2-2ab+b)=2b(-b+a)+a-b$$
$$=(a-b)(2b+1)\geqq 0$$

これより，$f(b)\leqq g(b)<0$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は，解 $x=b$ をもつ。

よって，求める条件は，$a<b^2$ である。

(i)(ii)(iii)より，求める条件は，

$$\frac{1}{4}+a+b<0 \quad \left(a<-\frac{1}{2}<b\right)$$
$$b<a^2 \quad \left(-\frac{1}{2}\leqq a<b\right)$$
$$a<b^2 \quad \left(a<b\leqq -\frac{1}{2}\right)$$



図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

［解　説］

$f(x)$ と $g(x)$ のグラフをかき，結論を図から判断して解答例を記述しています。この図は省いていますが，方針を立てるうえでは最も重要なものです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　A が B より先に 2 勝する場合は，A が 2 連勝のとき，または A が 1 勝 1 敗で 3 試合目に A が勝つときより，その確率 P_2 は，

$$P_2 = p^2 + {}_2\mathrm{C}_1 pq\cdot p = p^2 + 2p^2q = p^2(1+2q)$$

(2)　A が B より先に 3 勝する場合は，A が 3 連勝のとき，または A が 2 勝 1 敗で 4 試合目に A が勝つとき，または A が 2 勝 2 敗で 5 試合目に A が勝つときである。

すると，その確率 P_3 は，

$$P_3 = p^3 + {}_3\mathrm{C}_2 p^2q\cdot p + {}_4\mathrm{C}_2 p^2q^2\cdot p = p^3 + 3p^3q + 6p^3q^2 = p^3(1+3q+6q^2)$$

(3)　A が B より先に 4 勝する場合は，A が 4 連勝のとき，または A が 3 勝 1 敗で 5 試合目に A が勝つとき，または A が 3 勝 2 敗で 6 試合目に A が勝つとき，または A が 3 勝 3 敗で 7 試合目に A が勝つときである。

すると，その確率 P_4 は，

$$\begin{aligned}P_4 &= p^4 + {}_4\mathrm{C}_3 p^3q\cdot p + {}_5\mathrm{C}_3 p^3q^2\cdot p + {}_6\mathrm{C}_3 p^3q^3\cdot p\\ &= p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2 + 20p^4q^3 = p^4(1+4q+10q^2+20q^3)\end{aligned}$$

(4)　$p+q=1$ から，$p=1-q$ となり，

$$\begin{aligned}P_3 - P_4 &= p^3(1+3q+6q^2) - p^4(1+4q+10q^2+20q^3)\\ &= p^3\left\{1+3q+6q^2-(1-q)(1+4q+10q^2+20q^3)\right\}\\ &= p^3(-10q^3+20q^4) = 10p^3q^3(2q-1)\end{aligned}$$

すると，$\dfrac{1}{2}<q<1$ から $P_3-P_4>0$ となり，$P_4<P_3$ である。

［解 説］

確率の基本問題です。問題文の設定は文系とほとんど同じものです。ただ，文系から外挿した予想ははずれてしまいました。