1

解答解説のページへ

$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$とおき，$f(x)$をtの関数で表せ。

(2)　tの取りうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$の最大値と最小値, およびそのときのxの値を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i)　X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii)　X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(0,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

空間ベクトル$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を考える。$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$で，$\vec{b}$は xy 平面上にあり，その y 成分は正とする。また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$とおく。

(1)　$|p|<1$であることを示せ。また，pを用いて$\vec{b}$の成分表示をかけ。

(2)　$\vec{c}$と$\vec{d}$は相異なり，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$を満たすとする。$\vec{c}$の z 成分が正のとき，pを用いて$\vec{c}$と$\vec{d}$の成分表示をかけ。

(3)　上の条件に加えて$\vec{c}\cdot\vec{d}=p$であるときpの値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

実数 t が $0 \leqq t < 8$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を考える。

(1)　点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。

(2)　(1)での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ，PR と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおくと，$t^2=1+2\sin x\cos x$ から $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$ となり，

$$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}(t^2-1)+t=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$f(x)=g(t)$ とおくと，(1)より，$g(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

すると，$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は最小値 $-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ をとる。

このとき，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ となり，

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\quad x=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$$

また，$t=\sqrt{2}$ のとき，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ をとる。

このとき，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ から，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ となり，

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{4}$$

［解　説］

北大・文系では，昨年も出題された三角関数の基本の確認です。

2

問題のページへ

(1)　2 個のサイコロの目と，出た目の積 X を 4 で割った余りの対応は，右表のようになる。

すると，1 回投げて点 P が $(1,\ 0)$ にあるのは，右表で 2 の場合より，その確率は，

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

(2)　1 回投げて点 P が $(0,\ 1)$ にあるのは，右表で 3 の場合より，その確率は，

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

(3)　3 回投げて点 P が $(2,\ 1)$ にあるのは，右上の表で 2 が 2 回で 3 が 1 回の場合である。(1)の結果を利用すると，その確率は，

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

［解　説］

センター試験を解くときのように表を作りました。これが一番確実でしょう。

3

問題のページへ

(1)　$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$ は xy 平面上の単位ベクトルで，その y 成分は正から，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと，$0<\theta<\pi$ となり，

$$p=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\cos\theta,\ |p|=|\cos\theta|<1$$

すると，$\vec{b}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とおくことができ，$\sin\theta=\sqrt{1-p^2}$ から，

$$\vec{b}=\left(p,\ \sqrt{1-p^2},\ 0\right)$$

(2)　$\vec{c}=(x,\ y,\ z)$，$\vec{d}=(u,\ v,\ w)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=p$ より，

$$x=u=p\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$ より，$px+y\sqrt{1-p^2}=pu+v\sqrt{1-p^2}=p\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$p^2+y\sqrt{1-p^2}=p^2+v\sqrt{1-p^2}=p$ となり，

$$y=v=\frac{p-p^2}{\sqrt{1-p^2}}=\frac{p(1-p)}{\sqrt{(1-p)(1+p)}}=\frac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$|\vec{c}|=1$ より，①③から，$p^2+\dfrac{p^2(1-p)}{1+p}+z^2=1$

$$z^2=1-p^2-\frac{p^2(1-p)}{1+p}=\frac{(1-p)(1+2p+p^2-p^2)}{1+p}=\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

$z>0$ より，$z=\dfrac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}$ である。

また，$|\vec{d}|=1$ で $\vec{c}\neq\vec{d}$ より，$w=-\dfrac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}$ となり，

$$\vec{c}=\left(p,\ \frac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}},\ \frac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}\right)$$

$$\vec{d}=\left(p,\ \frac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}},\ -\frac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}\right)$$

(3)　$\vec{c}\cdot\vec{d}=p$ より，$p^2+\dfrac{p^2(1-p)}{1+p}-\dfrac{(1-p)(1+2p)}{1+p}=p$ となり，

$$\frac{p^2(1+p)+p^2(1-p)-(1-p)(1+2p)}{1+p}=p$$

よって，$4p^2-p-1=p+p^2$ から，$3p^2-2p-1=0$

すると，$(3p+1)(p-1)=0$ となり，$|p|<1$ から，$p=-\dfrac{1}{3}$

［解　説］

計算はやや複雑ですが，内容は連立方程式を解くだけです。

4

問題のページへ

(1)　$y=x^2$ に対して $y'=2x$ となるので，接点を $(u,\ u^2)$ とすると，接線の方程式は，

$$y-u^2=2u(x-u),\quad y=2ux-u^2$$

ここで，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ を通ることより，

$$t^3-8t^2+15t-56=2ut-u^2,\quad u^2-2tu+t^3-8t^2+15t-56=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

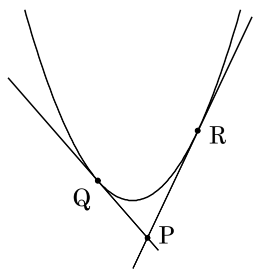
$(*)$の判別式を D とすると，

$$D/4=t^2-(t^3-8t^2+15t-56)=-t^3+9t^2-15t+56=-(t-8)(t^2-t+7)$$

ここで，$0\leqq t<8$ で，$t^2-t+7=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$ から，$D>0$ となり，$(*)$は異なる 2 実数解をもつ。

すなわち，点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引ける。

(2)　$(*)$の解は，$u=t\pm\sqrt{-(t-8)(t^2-t+7)}$ となり，これを $u=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ とおく。



すると，接線の方程式は，

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\quad y=2\beta x-\beta^2$$

この交点は，$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$ から，

$$x=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

よって，線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ は，

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x^2-2\beta x+\beta^2)dx\\&=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx\\&=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{-(t-8)(t^2-t+7)}\right)^3=\frac{2}{3}\left\{-(t-8)(t^2-t+7)\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

［解　説］

センター試験でも出題されている超頻出の問題です。ただ，点 P の座標の設定が $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ となって訳あり風ですが，この意味は不明です。なお，$D/4$ の因数分解は，与えられた条件から推測して行っています。