1

解答解説のページへ

a と b を正の実数とする。$y = a\cos x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_1，$y = b\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを C_2 とし，C_1 と C_2 の交点を P とする。

(1) P の x 座標を t とする。このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を a と b で表せ。

(2) C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S を a と b で表せ。

(3) C_1，C_2 と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とする。このとき，$T = 2S$ となるための条件を a と b で表せ。

2

解答解説のページへ

座標平面上で，直線 $y=x$ に関する対称移動を f とし，実数 c に対して，直線 $y=cx$ に関する対称移動を g とする。また，原点を中心とする $120°$ の回転移動を h とする。

(1) f を表す行列，および h を表す行列を求めよ。

(2) g を表す行列を求めよ。

(3) 合成変換 $f\circ g$ が h になるように c の値を定めよ。

3

解答解説のページへ

実数 $x,\ y,\ s,\ t$ に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。

(1) w を z で表し，$s,\ t$ を $x,\ y$ で表せ。

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 D を座標平面上に図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が D を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i)　X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii)　X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii)　X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv)　X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(-1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　2 個のサイコロを 4 回投げて，点 P が $(1,\ 1)$ にある確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

区間 $-\infty < x < \infty$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x) = \int_0^{2x} tf(2x-t)\,dt$$

とおく。

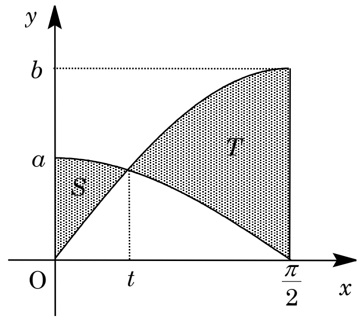
(1) $F\left(\dfrac{x}{2}\right) = \displaystyle\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$ となることを示せ。

(2) 2 次導関数 F'' を f で表せ。

(3) F が 3 次多項式で $F(1) = f(1) = 1$ となるとき, f と F を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき，$C_1 : y = a\cos x$，$C_2 : y = b\sin x$ の交点が $x = t$ より，

$$a\cos t = b\sin t,\ \cos t = \frac{b}{a}\sin t$$

そこで，$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入すると，

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\sin^2 t = 1,\ \sin t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

すると，$\cos t = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2)　C_1，C_2 と y 軸で囲まれた領域の面積 S は，

$$S = \int_0^t (a\cos x - b\sin x)\,dx = \left[a\sin x + b\cos x\right]_0^t = a\sin t + b(\cos t - 1)$$

$$= a\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + b\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - 1\right) = \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - b = \sqrt{a^2+b^2} - b$$

(3)　C_1，C_2 と直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を T とするとき，

$$S - T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos x - b\sin x)\,dx = \left[a\sin x + b\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a - b$$

ここで，条件より，$T = 2S$ なので，$-S = a - b$ となり，(2)より，

$$b - \sqrt{a^2+b^2} = a - b,\ 2b - a = \sqrt{a^2+b^2}$$

$2b > a$ のもとで，$4b^2 - 4ab + a^2 = a^2 + b^2$，$3b^2 - 4ab = 0$

よって，$3b = 4a$ から，$a = \frac{3}{4}b$ である。

なお，この式は，$a > 0$，$b > 0$ より，$2b > a$ を満たしている。

［解　説］

定積分と面積の頻出題です。なお，(3)では，$S - T$ を考え，計算量を減少させようと試みましたが，さほど効果はありませんでした。

2

問題のページへ

(1) 対称移動 f, 回転移動 h を表す行列を，それぞれ A, B とすると，

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ\\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

(2) 対称移動 g を表す行列を C とすると，g によって，点 $(1,\ c)$，$(-c,\ 1)$ は，それぞれ点 $(1,\ c)$，$(c,\ -1)$ に移るので，

$$C\begin{pmatrix}1\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ c\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}-c\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ -1\end{pmatrix}$$

まとめると，$C\begin{pmatrix}1 & -c\\ c & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & c\\ c & -1\end{pmatrix}$ となり，

$$C=\begin{pmatrix}1 & c\\ c & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -c\\ c & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix}1 & c\\ c & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & c\\ -c & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix}1-c^2 & 2c\\ 2c & c^2-1\end{pmatrix}$$

(3) $f\circ g=h$ より $AC=B$ となり，$\dfrac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-c^2 & 2c\\ 2c & c^2-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$

両辺の成分を比べると，

$$\frac{2c}{c^2+1}=-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①,\ \frac{c^2-1}{c^2+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$c^2+4c+1=0$ から，$c=-2\pm\sqrt{3}$

②より，$(2+\sqrt{3})c^2=2-\sqrt{3}$ から，$c=\pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\pm\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}}=\pm(2-\sqrt{3})$

よって，$c=-2+\sqrt{3}$

［解 説］

1 次変換の頻出題です。(1)はプロセス抜きで記しましたが，問題の流れから推測すると，これで構わないでしょう。

3　　　　問題のページへ

(1)　$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ より，$z(w+1)=w-1$ から，$(z-1)w=-z-1$ ………①

$z=1$ のとき①は成立しないので，$z\neq 1$ となり，$w=\dfrac{-z-1}{z-1}$ ………②

ここで，$z=x+yi$，$w=s+ti$ より，②から，

$$s+ti=\frac{-(x+1)-yi}{(x-1)+yi}=\frac{\{-(x+1)-yi\}\{(x-1)-yi\}}{(x-1)^2+y^2}=\frac{-(x^2-1)-y^2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

よって，$s=\dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$ ……③，$t=\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$ ……④

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ より，③④から，

$$0\leqq\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \cdots\cdots⑤,\quad 0\leqq\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \cdots\cdots⑥$$

⑤より，$0\leqq -x^2-y^2+1$ となり，$x^2+y^2\leqq 1$ ………⑦

また，$-x^2-y^2+1\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$x^2+y^2-x\geqq 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqq\frac{1}{4}\ \cdots\cdots⑧$$

⑥より，$0\leqq 2y$ となり，$y\geqq 0$ ………⑨

また，$2y\leqq(x-1)^2+y^2$ となり，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 1$ ………⑩

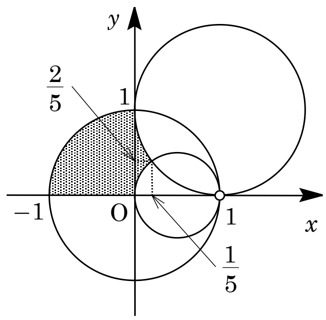
なお，⑧の境界線 $x^2+y^2-x=0$ と，⑩の境界線 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の点 $(1,\ 0)$ 以外の交点は，両式を連立して，

$$-x-2y+1=0,\quad x=-2y+1$$

すると，$(-2y+1)^2+y^2-(-2y+1)=0$ から，

$$5y^2-2y=0$$

よって，$y=\dfrac{2}{5}$，$x=-2\cdot\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{1}{5}$



$z\neq 1$ のもとで，⑦～⑩より，求める範囲 D は右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

(3)　$-5x+y=k$ とおくと，$y=5x+k$ から，傾き 5 で y 切片 k の直線を表す。

すると，k が最小となるのは，(2)の図を利用すると，この直線が点 $\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$ を通るときであり，その最小値は，

$$k=-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}$$

［解　説］

複素数が題材ですが，内容的には xy 平面での不等式と領域の問題です。

4

問題のページへ

(1)　2 個のサイコロの目と，出た目の積 X を 4 で割った余りの対応は，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

すると，1 回投げて点 P が $(-1,\ 0)$ にあるのは，右表で 0 の場合より，その確率は，

$$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

(2)　3 回投げて点 P が $(2,\ 1)$ にあるのは，右表で 2 が 2 回，3 が 1 回起こる場合である。

2，3 となる確率は，それぞれ $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$，$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ であるので，求める確率は，

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

(3)　4 回投げて点 P が $(1,\ 1)$ にあるのは，右上の表で，0 が a 回，1 が b 回，2 が c 回，3 が d 回起こる場合であるとすると，

$$a+b+c+d=4\cdots\cdots\cdots①,\quad -a+c=1\cdots\cdots\cdots②,\quad -b+d=1\cdots\cdots\cdots③$$

②③を①に代入すると，$a+b=1$ となり，$(a,\ b)=(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$ から，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 0,\ 2,\ 1)$$

0, 1, 2, 3 となる確率は，それぞれ $\frac{5}{12}$，$\frac{5}{36}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{9}$ であるので，求める確率は，

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{4!}{2!}\cdot\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{9^3}+\frac{5}{9^2}=\frac{50}{729}$$

［解　説］

センター試験を解くときのように表を作りました。これが一番確実でしょう。なお，文系に類題が出ています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) $F(x)=\int_0^{2x}tf(2x-t)dt$ より，$F\left(\frac{x}{2}\right)=\int_0^x tf(x-t)dt$

ここで，$s=x-t$ とおくと，$ds=-dt$ となり，

$$F\left(\frac{x}{2}\right)=\int_x^0(x-s)f(s)(-ds)=\int_0^x(x-s)f(s)ds$$

(2) $F\left(\frac{x}{2}\right)=x\int_0^x f(s)ds-\int_0^x sf(s)ds$ ……①の両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{2}F'\left(\frac{x}{2}\right)=\int_0^x f(s)ds+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(s)ds \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，②の両辺を x で微分すると，$\frac{1}{4}F''\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)$ となり，

$$F''\left(\frac{x}{2}\right)=4f(x),\ F''(x)=4f(2x) \cdots\cdots\cdots ③$$

(3) 条件より，$F(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$ とおくと，

$$F'(x)=3ax^2+2bx+c,\ F''(x)=6ax+2b$$

ここで，$F(1)=1$ より，$a+b+c+d=1$ ………④

また，$f(1)=1$ から，③を用いると，$F''\left(\frac{1}{2}\right)=4f(1)=4$ となり，

$$3a+2b=4 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

さらに，①②から，$F(0)=F'(0)=0$ なので，$c=d=0$ ………⑥

④⑤⑥から，$a=2$，$b=-1$ となり，$F(x)=2x^3-x^2$

$$f(x)=\frac{1}{4}F''\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}(3ax+2b)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

［解　説］

典型的な微分型の積分方程式です。誘導も細かくついています。