1

解答解説のページへ

2 つの放物線　$C_1 : y = -x^2 + \dfrac{3}{2}$，$C_2 : y = (x-a)^2 + a$　$(a > 0)$ がある。点 $\mathrm{P}_1\left(p,\ -p^2 + \dfrac{3}{2}\right)$における C_1 の接線を l_1 とする。

(1)　C_1 と C_2 が共有点をもたないための a に関する条件を求めよ。

(2)　l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と，l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を a, p を用いて表せ。

(3)　C_1 と C_2 が共有点をもたないとする。(2)で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき，p を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の条件で定められる数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数$s,\ t\ (s>t)$を定めよ。

$$\begin{cases} a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n) \\ a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n) \end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 一般項a_nを求めよ。

3　　解答解説のページへ

△ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して，BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし，線分 AD と△ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

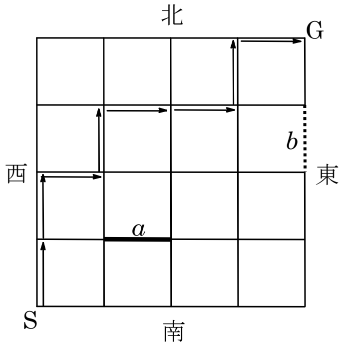
(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。

1　問題のページへ

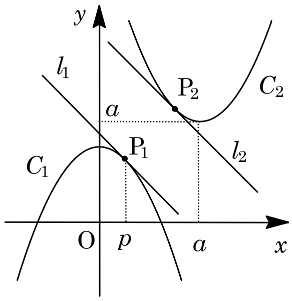
(1)　$C_1 : y = -x^2 + \dfrac{3}{2}$ ……①，$C_2 : y = (x-a)^2 + a$ ……②を連立すると，

$$-x^2 + \frac{3}{2} = (x-a)^2 + a\,,\ \ 4x^2 - 4ax + 2a^2 + 2a - 3 = 0$$

C_1 と C_2 が共有点をもたないことより，$D/4 = 4a^2 - 4(2a^2 + 2a - 3) < 0$

$$a^2 + 2a - 3 > 0\,,\ \ (a+3)(a-1) > 0$$

$a > 0$ より，$a > 1$ である。



(2)　①より $y' = -2x$ となり，点 $\mathrm{P_1}\left(p,\ -p^2 + \dfrac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線 l_1 の傾きは $-2p$ である。そこで，l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式を $y = -2px + k$ ……③とおく。

②③を連立すると，$(x-a)^2 + a = -2px + k$ となり，

$$x^2 - 2(a-p)x + a^2 + a - k = 0 \text{ ………④}$$

④が重解をもつことより，$D/4 = (a-p)^2 - (a^2 + a - k) = 0$

$$-2ap + p^2 - a + k = 0\,,\ \ k = -p^2 + 2ap + a$$

よって，$l_2 : y = -2px - p^2 + 2ap + a$ である。

また，l_2 と C_2 の接点 $\mathrm{P_2}$ の x 座標は，④の重解なので，

$$x = a - p\,,\ \ y = (a - p - a)^2 + a = p^2 + a$$

これより，$\mathrm{P_2}(a - p,\ a + p^2)$ となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = \left(a - p - p,\ a + p^2 + p^2 - \dfrac{3}{2}\right) = \left(a - 2p,\ a + 2p^2 - \dfrac{3}{2}\right)$

また，l_1 の方向ベクトルを $\vec{u} = (1,\ -2p)$ とすると，条件より $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} \cdot \vec{u} = 0$ となり，

$$a - 2p - 2p\left(a + 2p^2 - \frac{3}{2}\right) = 0\,,\ \ a + p - 4p^3 - 2ap = 0$$

すると，$(1-2p)a + p(1-2p)(1+2p) = 0$，$(1-2p)(2p^2 + p + a) = 0$ ………⑤

ここで，(1)から $a > 1$ のとき，$2p^2 + p + a = 0$ の判別式 $D = 1 - 8a < 0$ となるので，$2p^2 + p + a = 0$ は実数解をもたない。

よって，⑤より，$p = \dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

放物線と接線を題材にした基本問題です。(2)では重解条件を利用しましたが，まず接点 $\mathrm{P_2}$ を設定する方法でも構いません。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$……①で定められる数列 $\{a_n\}$ に対し，条件より，$s>t$ として，

$$a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)\cdots\cdots②,\quad a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n)\cdots\cdots③$$

②③はいずれも，$a_{n+2}=(s+t)a_{n+1}-sta_n$ となり，①から，

$$s+t=1,\quad st=-3$$

すると，s, t は2次方程式 $x^2-x-3=0$ の解 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ となり，

$$s=\frac{1+\sqrt{13}}{2},\quad t=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

(2)　②より，$a_{n+1}-sa_n=(a_2-sa_1)t^{n-1}$ となり，$a_2-sa_1=1-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

$$a_{n+1}-sa_n=\frac{1-\sqrt{13}}{2}t^{n-1}=t^n\cdots\cdots\cdots④$$

③より，$a_{n+1}-ta_n=(a_2-ta_1)s^{n-1}$ となり，$a_2-ta_1=1-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

$$a_{n+1}-ta_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}s^{n-1}=s^n\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$(s-t)a_n=s^n-t^n$ となり，

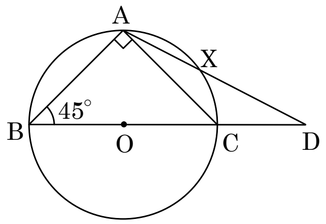
$$a_n=\frac{1}{s-t}(s^n-t^n)=\frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$$

［解　説］

隣接3項間型の漸化式を解く有名問題ですが，誘導があるために，たとえば $s>t$ を満たす s，t の組が1組だけを示すことも要求されているのかどうか，この設問の流れでは不要ではないか，などと考え込んでしまいます。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　条件より，$\mathrm{BC}:\mathrm{CD}=1:p$ から，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=p\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる。

また，点 O は辺 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(1+p)\overrightarrow{\mathrm{OC}}-p\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(1+p)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

(2)　まず，$\mathrm{BC}=1$ としても一般性を失うことはない。

このとき，条件より，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{CD}=p$ となり，方べきの定理から，

$$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DX}=p(p+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，$\mathrm{DX}=k\mathrm{DA}$ とおくと，①より，$k\mathrm{DA}^2=p(p+1)\cdots\cdots\cdots②$

また，△ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DA}^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(1+p)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+p)\cos 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}+1+2p+p^2-(1+p)=\frac{1}{2}(2p^2+2p+1)\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$k=\dfrac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}$ となり，$\mathrm{DX}:\mathrm{XA}=k:1-k$ から，

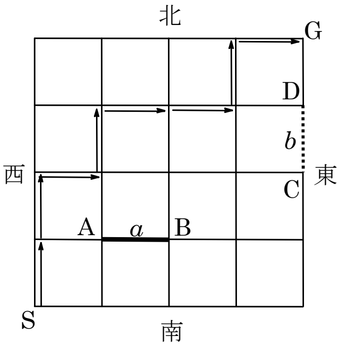
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left\{1-\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\right\}(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2p+1}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

［解 説］

ベクトルの図形への応用問題です。点 O を原点とし，BC を x 軸，OA を y 軸として座標系を設定する方法も考えられます。確実ですが，計算量は多くなるでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　まず，右図のように区間 a の両端を A と B，区間 b の両端を C と D とする。

すると，区間 a を通り抜ける経路は，S→A→B→G となり，その数は，$2\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=20$ である。

(2)　区間 a, b を通り抜ける経路 S→A→B→C→D→G は，$2\times1\times\dfrac{3!}{2!}\times1\times1=6$ 通りあり，区間 b を通り抜ける経路 S→C→D→G は，$\dfrac{6!}{4!2!}\times1\times1=15$ 通りある。

よって，区間 a を通り抜けずに b を通り抜ける経路数は，$15-6=9$ である。

(3)　まず，S→G の全経路数は，$\dfrac{8!}{4!4!}=70$ である。以下，区間 a, b を通り抜けるかどうかで場合分けをする。

(i)　区間 a, b をともに通り抜けるとき

かかる時間は $1+8+2\times6=21$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{6}{70}$ である。

(ii)　区間 a を通り抜けずに，b を通り抜けるとき

かかる時間は $8+2\times7=22$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{9}{70}$ である。

(iii)　区間 a を通り抜け，b を通り抜けないとき

かかる時間は $1+2\times7=15$ 分で，その確率は，(1)(2)より $\dfrac{20-6}{70}=\dfrac{14}{70}$ である。

(iv)　区間 a, b をともに通り抜けないとき

かかる時間は $2\times8=16$ 分で，その確率は，$1-\left(\dfrac{6}{70}+\dfrac{9}{70}+\dfrac{14}{70}\right)=\dfrac{41}{70}$ である。

(i)～(iv)より，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値 E は，

$$E=21\times\frac{6}{70}+22\times\frac{9}{70}+15\times\frac{14}{70}+16\times\frac{41}{70}=17\ \text{（分）}$$

［解　説］

センターレベルの確率の問題です。ベン図を描いてミスを防ぐのも一案です。