1

解答解説のページへ

$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値，およびそのときの x を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$ $(a<b)$ で接する直線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$　解答解説のページへ

四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ を満たす。辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$pq=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。$p+q=t$ とし，△CPQ の面積を S とする。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) S を t で表せ。

(3) S の最小値，およびそのときの p, q を求めよ。

3

解答解説のページへ

逆行列をもつ 2 次の正方行列，A_1，A_2，A_3，…が，関係式

$$A_{n+1}A_n = A_n + 2E \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。さらに $A_1 + E$ は逆行列をもつとする。ここで E は 2 次の単位行列とする。

(1)　すべての自然数 n に対して $A_n + E$ は逆行列をもち，

$$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$$

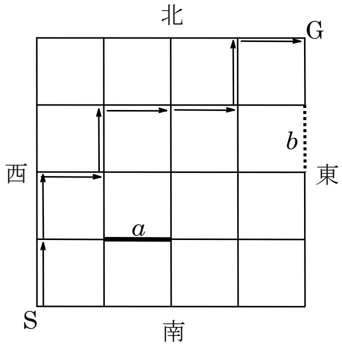
が成立することを示せ。

(2)　$B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ により，行列 B_n を定める。B_{n+1} と B_n との間に成立する関係式を求め，B_n を B_1 と n を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。

5

解答解説のページへ

$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ とおく。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ に対し，$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x+1)(x-4)$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $x=0$ のとき 0，極小値は $x=-1$ のとき -3 および $x=4$ のとき -128 である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3	↗	0	↘	-128	↗

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$　$(a<b)$ で接する直線の方程式を，$y=mx+n$ とおくと，$f(x)-(mx+n)=0$ は重解 $x=a,\ b$ をもつので，

$$f(x)-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)^2g(x)\quad（g(x)\text{は整式}）$$

ここで，$f(x)-(mx+n)$ は x^4 の係数が 1 の 4 次式なので，$g(x)=1$ となり，

$$x^4-4x^3-8x^2-mx-n=(x-a)^2(x-b)^2\cdots\cdots\cdots①$$

すると，①の x^3，x^2，x の係数および定数項を比較すると，

$$-4=-2a-2b\cdots\cdots\cdots②,\ \ -8=a^2+4ab+b^2\cdots\cdots\cdots③$$

$$-m=-2a^2b-2ab^2\cdots\cdots\cdots④,\ \ -n=a^2b^2\cdots\cdots\cdots⑤$$

②より $a+b=2\cdots\cdots⑥$ となり，③を $(a+b)^2+2ab=-8$ として代入すると，

$$4+2ab=-8,\ \ ab=-6\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$a,\ b$ は 2 次方程式 $t^2-2t-6=0$ の 2 つの解 $t=1\pm\sqrt{7}$ となり，

$$a=1-\sqrt{7},\ \ b=1+\sqrt{7}$$

このとき，④より $m=2ab(a+b)=-24$，⑤より $n=-a^2b^2=-36$

よって，求める接線の方程式は，$y=-24x-36$ である。

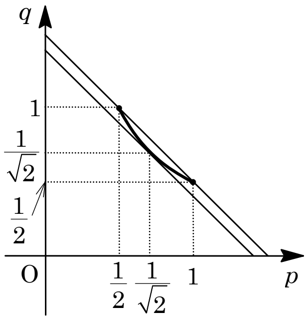
［解　説］

4 次曲線の複接線を求める定番ともいえるものです。なお，$f(x)-(mx+n)=0$ が重解をもつことは証明なしで利用したため，単に恒等式の処理だけになっています。

2

問題のページへ

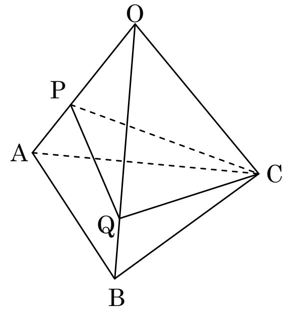
(1)　条件$0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$，$pq=\dfrac{1}{2}$を pq 平面上に図示すると，右図の曲線（太線）となる。



ここで，$p+q=t$ ……(＊)とおき，この曲線と直線(＊)が共有点をもつ条件を考えることにより，t のとり得る値の範囲を求めると，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1+\frac{1}{2},\ \ \sqrt{2}\leqq t\leqq\frac{3}{2}$$

(2)　条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり，



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=p^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2p\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=p^2+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2=q^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2q\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=q^2+1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=pq\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-p\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-q\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$
$$=1$$

これより，△CPQ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)-1^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+p^2+q^2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+(p+q)^2-2pq}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+t^2-1}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-\frac{3}{4}}$$

(3)　(1)の結果から，$t=\sqrt{2}$ $\left(p=q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき S は最小となり，最小値は，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ である。

［解 説］

空間ベクトルに関する基本的な問題です。(2)の結論が明快すぎて，計算ミスを疑ってしまいました。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　条件より，$A_{n+1}A_n = A_n + 2E$ から，$A_{n+1}A_n + A_n = 2(A_n + E)$

$$(A_{n+1} + E)\left(\frac{1}{2}A_n\right) = A_n + E \cdots\cdots\cdots(*)$$

まず，すべての自然数 n に対して $A_n + E$ は逆行列をもつことを示す。

(i)　$n = 1$ のとき　条件より $A_1 + E$ は逆行列をもつ。

(ii)　$n = k$ のとき　$A_k + E$ は逆行列をもつと仮定する。

ここで，一般的に正方行列 X の行列式を $\det X$ で表すと，$\det(A_k + E) \neq 0$

すると，$(*)$から，$\det\left((A_{k+1} + E)\left(\frac{1}{2}A_k\right)\right) = \det(A_k + E)$ より，

$$\det\left((A_{k+1} + E)\left(\frac{1}{2}A_k\right)\right) \neq 0,\ \det(A_{k+1} + E)\cdot\det\left(\frac{1}{2}A_k\right) \neq 0$$

条件から $\det\left(\frac{1}{2}A_k\right) \neq 0$ なので，$\det(A_{k+1} + E) \neq 0$

よって，$A_{k+1} + E$ は逆行列をもつ。

(i)(ii)から，すべての自然数 n に対して $A_n + E$ は逆行列をもつ。

また，一般的に逆行列をもつ正方行列 X, Y に対して，

$$(XY)(Y^{-1}X^{-1}) = X(YY^{-1})X^{-1} = XEX^{-1} = XX^{-1} = E$$

$$(Y^{-1}X^{-1})(XY) = Y^{-1}(X^{-1}X)Y = Y^{-1}EY = Y^{-1}Y = E$$

よって，$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ となるので，$(*)$から，

$$\left((A_{n+1} + E)\left(\frac{1}{2}A_n\right)\right)^{-1} = (A_n + E)^{-1},\ \left(\frac{1}{2}A_n\right)^{-1}(A_{n+1} + E)^{-1} = (A_n + E)^{-1}$$

したがって，$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$ である。

(2)　$B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$ とおくと，(1)より，

$$B_{n+1} = (2E - A_{n+1})(A_{n+1} + E)^{-1} = (2E - A_{n+1})\left(\frac{1}{2}A_n\right)(A_n + E)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(2A_n - A_{n+1}A_n)(A_n + E)^{-1} = \frac{1}{2}(2A_n - A_n - 2E)(A_n + E)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}(A_n - 2E)(A_n + E)^{-1} = -\frac{1}{2}B_n$$

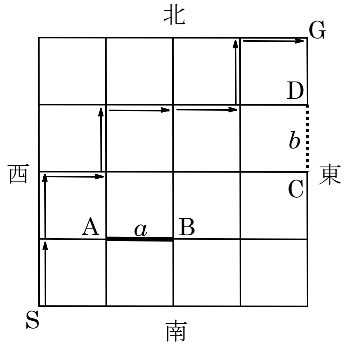
これより，$B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}B_1$ となる。

［解　説］

結論から導いた$(*)$がすべてです。なお，$\det(XY) = \det X\cdot\det Y$ は証明なしで用いています。$(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$ は簡単に示しましたが。

4

問題のページへ



(1)　まず，右図のように区間 a の両端を A と B，区間 b の両端を C と D とする。

すると，区間 a を通り抜ける経路は，S→A→B→G となり，その数は，$2\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=20$ である。

(2)　区間 $a,\ b$ を通り抜ける経路 S→A→B→C→D→G は，$2\times1\times\dfrac{3!}{2!}\times1\times1=6$ 通りあり，区間 b を通り抜ける経路 S→C→D→G は，$\dfrac{6!}{4!2!}\times1\times1=15$ 通りある。

よって，区間 a を通り抜けずに b を通り抜ける経路数は，$15-6=9$ である。

(3)　まず，S→G の全経路数は，$\dfrac{8!}{4!4!}=70$ である。以下，区間 $a,\ b$ を通り抜けるかどうかで場合分けをする。

(i)　区間 $a,\ b$ をともに通り抜けるとき

かかる時間は $1+8+2\times6=21$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{6}{70}$ である。

(ii)　区間 a を通り抜けずに，b を通り抜けるとき

かかる時間は $8+2\times7=22$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{9}{70}$ である。

(iii)　区間 a を通り抜け，b を通り抜けないとき

かかる時間は $1+2\times7=15$ 分で，その確率は，(1)(2)より $\dfrac{20-6}{70}=\dfrac{14}{70}$ である。

(iv)　区間 $a,\ b$ をともに通り抜けないとき

かかる時間は $2\times8=16$ 分で，その確率は，$1-\left(\dfrac{6}{70}+\dfrac{9}{70}+\dfrac{14}{70}\right)=\dfrac{41}{70}$ である。

(i)～(iv)より，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値 E は，

$$E=21\times\frac{6}{70}+22\times\frac{9}{70}+15\times\frac{14}{70}+16\times\frac{41}{70}=17\ （分）$$

［解　説］

センターレベルの確率の問題です。ベン図を描いてミスを防ぐのも一案です。

5

問題のページへ

(1)　$F'(\theta)=|\sin\theta|$ とおくと，$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta=F\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-F(x)$ となり，

$$f'(x)=F'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-F'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|$$

(2)　(i)　$x+\dfrac{\pi}{3}\leqq\pi\left(0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi\right)$ のとき

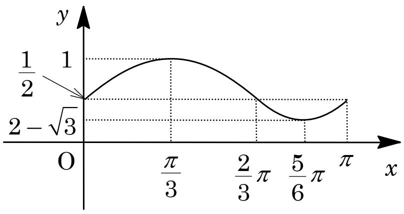
$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}\sin\theta d\theta=-\Big[\cos\theta\Big]_x^{x+\frac{\pi}{3}}=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x$$
$$=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

(ii)　$x+\dfrac{\pi}{3}\geqq\pi\left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi\right)$ のとき

$$f(x)=\int_x^{\pi}\sin\theta d\theta+\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{3}}(-\sin\theta)d\theta=-\Big[\cos\theta\Big]_x^{\pi}+\Big[\cos\theta\Big]_{\pi}^{x+\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\cos\pi+\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\pi=2+\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=2+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2+\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

(i)(ii)より，$0\leqq x\leqq\pi$ において，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値 1 をとり，$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $2-\sqrt{3}$ をとる。



［解　説］

(2)では，最大値，最小値も要求されているし，計算も簡単そうでしたので，まず $f(x)$ を求めています。そのため，流れを無視したような形になっています。