1

解答解説のページへ

2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = -(x-1)^2$ がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を l とする。

(1) l の方程式を a で表せ。

(2) C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) C_2 と l が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。

2　解答解説のページへ

p は 0 でない実数とし，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{p}a_n - (-1)^{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$b_n = p^n a_n$ とする。b_{n+1} を b_n , n, p で表せ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。

4

解答解説のページへ

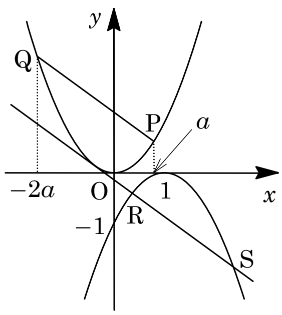
ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。

(1)　番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2)　番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = -(x-1)^2$ ……②に対し，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線の傾きは，

$$\frac{a^2-4a^2}{a+2a} = -a$$

①から $y' = 2x$ なので，C_1 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の傾きは $2t$ となり，接線 l について，

$$2t = -a,\ t = -\frac{a}{2}$$

これより，接線 l との方程式は，$y - \frac{a^2}{4} = -a\left(x + \frac{a}{2}\right)$，$y = -ax - \frac{a^2}{4}$ ………③

(2)　②③を連立すると，$-(x-1)^2 = -ax - \frac{a^2}{4}$ となり，

$$x^2 - (a+2)x - \frac{a^2}{4} + 1 = 0 \text{ ………④}$$

C_2 と l は異なる 2 つの共有点をもつので，$D = (a+2)^2 - 4\left(-\frac{a^2}{4} + 1\right) > 0$ から，

$$2a^2 + 4a > 0,\ a(a+2) > 0$$

よって，$a < -2$，$0 < a$ となる。

(3)　④の 2 つの解 $x = \frac{a+2 \pm \sqrt{2a^2+4a}}{2}$ を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，これは，それぞれ交点 R, S の x 座標である。

条件より，線分 PQ と線分 RS は平行であり，さらに PQ = RS なので，

$$\left|a - (-2a)\right| = \beta - \alpha,\ 3|a| = \sqrt{2a^2+4a},\ 9a^2 = 2a^2 + 4a$$

よって，$a \neq 0$ から，$a = \frac{4}{7}$ である。

［解　説］

頻出タイプの微分の問題です。(3)では x 座標の差だけ考えればよいので，計算量が少なくてすみました。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ に対して，両辺× p^{n+1} とすると，

$$p^{n+1}a_{n+1}=p^n a_n-(-p)^{n+1}$$

ここで，$b_n=p^n a_n$ とおくと，$b_{n+1}=b_n-(-p)^{n+1}$

(2)　(i)　$-p=1\ (p=-1)$ のとき

(1)より，$b_{n+1}=b_n-1$ となり，$b_n=b_1-(n-1)=-1\cdot 1-n+1=-n$ となり，

$$a_n=\frac{b_n}{(-1)^n}=-\frac{n}{(-1)^n}=-n(-1)^n$$

(ii)　$-p\neq 1\ (p\neq -1)$ のとき

(1)より，$n\geqq 2$ で，$b_n=b_1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k+1}=p\cdot 1-\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k+1}$ となり，

$$b_n=p-\frac{p^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1+p}=\frac{p+p^2-p^2+(-p)^{n+1}}{1+p}=\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$$

この式は，$n=1$ のときも成立し，a_n は，

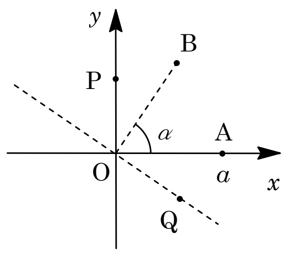
$$a_n=\frac{b_n}{p^n}=\frac{1}{p^n}\cdot\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}=\frac{1-(-p)^n}{p^{n-1}(1+p)}$$

［解　説］

誘導つきで漸化式を解く問題です。$p=-1$ のときの場合分けに要注意です。

3

問題のページへ



(1)　まず，$a>0$，$r>0$，$0<\alpha<\pi$ として，xy 平面上で，
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=r(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とおく。

すると，条件より，$p\neq 0$，$q\neq 0$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ p),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q(\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直なので，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q\sin\alpha,\ p-q\cos\alpha)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(r\cos\alpha-a,\ r\sin\alpha)$ から，

$$q\sin\alpha(r\cos\alpha-a)+(p-q\cos\alpha)r\sin\alpha=0$$

$\sin\alpha>0$ より，$q(r\cos\alpha-a)+r(p-q\cos\alpha)=0$，$pr-aq=0$ ………(＊)

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=pr\sin\alpha$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=aq\sin\alpha$ なので，(＊)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\beta\ (0<\beta<\pi)$ とおくと，$\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{-pq\cos\alpha}{|p||q|}$

ここで，(＊)から p と q は同符号なので，$|p||q|=|pq|=pq$ となり，

$$\cos\beta=\frac{-pq\cos\alpha}{pq}=-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{2}<\pi-\alpha<\pi$ となるので，$\beta=\pi-\alpha$ である。

(3)　(＊)より，$pr=aq$ となり，$r|p|=a|q|$ である。

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ から，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ となる。

［解 説］

まず, 2 つの垂直関係から, 座標の設定という方法を考えました。しかし, (1)を解くと, その考え方を採用するほどでもないことがわかり, それで押し通そうとも思ったのですが, (3)で暗雲が漂いはじめました。ということで, リセットして……。

4

問題のページへ

(1) 52 枚のカードを 1 列に並べる $52!$ 通りが同様に確からしいとする。

番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶのは，この 4 枚の 7 を 1 枚とみなして考えると，その位置が ${}_{49}\mathrm{C}_1$ 通り，7 のカードの並び方が $4!$ 通り，7 以外のカードの並び方が $(52-4)!=48!$ 通りより，その確率は，

$$\frac{{}_{49}\mathrm{C}_1\cdot 4!\cdot 48!}{52!}=\frac{1}{13\cdot 17\cdot 25}=\frac{1}{5525}$$

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合うのは，この隣り合う 2 枚の 7 を 1 枚とみなして考えると，その位置が ${}_{50}\mathrm{C}_2$ 通り，7 のカードの並び方が $4!$ 通り，7 以外のカードの並び方が $(52-4)!=48!$ 通りより，その確率は，

$$\frac{{}_{50}\mathrm{C}_2\cdot 4!\cdot 48!}{52!}=\frac{25}{13\cdot 17\cdot 25}=\frac{25}{5525}$$

すると，番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率は，

$$\frac{25}{5525}-\frac{1}{5525}=\frac{24}{5525}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。(1)を利用する方法で(2)の解答例を記しました。