1

解答解説のページへ

a は実数とし，2 つの曲線 $C_1 : y=(x-1)e^x$，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし，e は自然対数の底である。C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

(1)　a を t で表せ。

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

p, q は正の実数とし，$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とする。数列$\{b_n\}$の一般項を p, q, n で表せ。

(2)　$q=1$ とする。すべての自然数 n について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるような p の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

空間の 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(-1,\ 1,\ 1)$ の定める平面を α とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。α 上の点 C があり，その x 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1) C の座標を求めよ。

(2) $\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3) α 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から α に垂線を下ろし，α との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ を満たす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ。

4

解答解説のページへ

初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i)　まず同時に 2 個の玉を取り出す。

(ii)　その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。

(iii)　最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える。

n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。

(1)　$X_1 = 3$ となる確率を求めよ。

(2)　$X_2 = 3$ となる確率を求めよ。

(3)　$X_2 = 3$ であったとき，$X_1 = 3$ である条件付き確率を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

n は自然数，a は $a>\dfrac{3}{2}$ を満たす実数とし，実数 x の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)\,d\theta$$

を考える。ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$ を示せ。

(2)　$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ を満たす n と a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた n と a に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$C_1 : y = (x-1)e^x$ ……①，$C_2 : y = \dfrac{1}{2e}x^2 + a$ ……②に対して，

①より，$y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ となり，点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線 l は，

$$y-(t-1)e^t = te^t(x-t),\quad y = te^tx-(t^2-t+1)e^t \text{ ………③}$$

さて，②③を連立すると，$\dfrac{1}{2e}x^2 + a = te^tx-(t^2-t+1)e^t$

$$\frac{1}{2e}x^2 - te^tx + a + (t^2-t+1)e^t = 0$$

C_2 と l が接することより，$D = t^2e^{2t} - 4\cdot\dfrac{1}{2e}\{a+(t^2-t+1)e^t\} = 0$ となり，

$$t^2e^{2t+1} - 2a - 2(t^2-t+1)e^t = 0,\quad a = \frac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2-t+1)e^t \text{ ………④}$$

(2)　$f(t) = \dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2-t+1)e^t$ とおくと，④より，$a = f(t)$ となり，

$$\begin{aligned} f'(t) &= te^{2t+1} + t^2e^{2t+1} - (2t-1)e^t - (t^2-t+1)e^t \\ &= (t+t^2)e^{2t+1} - (t^2+t)e^t \\ &= t(t+1)e^t(e^{t+1}-1) \end{aligned}$$

ここで，$f'(t) = 0$ の解は $t = -1,\ 0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↘		↗

すると，$t = 0$ のとき $f(t)$ すなわち a は，極小値 $f(0) = -1$ をとる。

［解　説］

微分法の基本問題です。(1)の結論がややこしい形をしており，微分するには心が重かったのですが，杞憂に終わりました。

2

問題のページへ

(1)　$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ に対して，両辺 $\div\ p^{n+1}$ とすると，

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{n+1}$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とすると，$b_{n+1}=b_n+\Big(-\dfrac{q}{p}\Big)^{n+1}$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{k+1}=\frac{0}{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{k+1}$$

p,q は正の実数より，$-\dfrac{q}{p}\neq 1$ となり，

$$b_n=\frac{q^2}{p^2}\cdot\frac{1-\Big(-\dfrac{q}{p}\Big)^{n-1}}{1+\dfrac{q}{p}}=\frac{q^2}{p(p+q)}\Big\{1-\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{n-1}\Big\}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(2)　$q=1$ のとき，(1)より，$b_n=\dfrac{1}{p(p+1)}\Big\{1-\Big(-\dfrac{1}{p}\Big)^{n-1}\Big\}$ となり，

$$a_n=p^nb_n=\frac{1}{p+1}\{\,p^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$$

ここで，条件から $a_{n+1}\geqq a_n$ なので，$(p+1)a_{n+1}\geqq(p+1)a_n$

$$p^n-(-1)^n\geqq p^{n-1}-(-1)^{n-1},\quad p^{n-1}(p-1)\geqq 2(-1)^n\cdots\cdots\cdots(*)$$

以下，すべての自然数 n について，$(*)$が成立する条件を求める。

まず，$n=2$ のとき成立することより，$p(p-1)\geqq 2$ から $p^2-p-2\geqq 0$ となり，$p>0$ から $p\geqq 2$ が必要である。

逆に $p\geqq 2$ のとき，$p^{n-1}(p-1)\geqq 2^{n-1}\cdot 1\geqq 2(-1)^n$ となり$(*)$はつねに成立する。

以上より，求める条件は $p\geqq 2$ である。

［解　説］

誘導つきの漸化式に加えて，必要十分条件についての取扱い方法が問われています。なお，(2)の後半で $n=1$ の場合について記述していないのは，$p>0$ に関する条件が新たに求まらないということにすぎません。

$\boxed{3}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 1)$に対し，$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1+1+1=1$

さて，p, q を実数として，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，$|\vec{c}|=1$ から，

$$p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \ p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=1$$

よって，$3p+q=0$ ……①，$3p^2+2pq+3q^2=1$ ……②

また，$\vec{c}$ の x 成分が正より，$p-q>0$ ………③

すると，①③より，$p+3p>0$，$p>0$ となり，①②より，

$$3p^2-6p^2+27p^2=1,\ \ 24p^2=1,\ \ p=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

①より，$q=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ となり，$\vec{c}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\vec{a}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{b}$ ……④から，

$$\vec{c}=\frac{\sqrt{6}}{12}(1,\ 1,\ 1)-\frac{\sqrt{6}}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{6},\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

よって，点 C の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$である。

(2)　④より，$\dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{b}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\vec{a}-\vec{c}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\vec{c}$ となり，$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$s=\frac{1}{3},\ \ t=-\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\vec{a}+l\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{c}=0$ から，

$$k|\vec{a}|^2+l\vec{a}\cdot\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=0,\ \ k\vec{a}\cdot\vec{c}+l|\vec{c}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=3k$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=l$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ から

$$k=\frac{1}{3}(x+y+z),\ \ l=\frac{\sqrt{6}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{6}y-\frac{\sqrt{6}}{6}z=\frac{\sqrt{6}}{6}(2x-y-z)$$

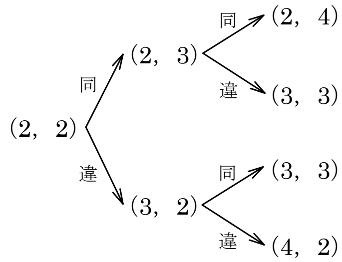
［解 説］

空間ベクトルの成分表示についての標準的な問題です。(3)は，$\vec{a}$, $\vec{b}$ のセットで表される平面 α を，直交する $\vec{a}$, $\vec{c}$ のセットで表現し直す内容になっています。

4

問題のページへ

(1)　与えられた試行により，取り出した 2 個の玉の色が同じときは白玉が 1 個増え，違うときは赤玉が 1 個増える。この試行を 2 回繰り返すとき，袋の中の(赤玉，白玉)の個数は，右図のように変化する。



さて，$X_1=3$ となるのは，(2，2)→(3，2) の場合より，取り出した玉は色違いで，その確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$$

(2)　$X_2=3$ となるのは，(2，2)→(2，3)→(3，3) または(2，2)→(3，2)→(3，3) のいずれかより，その確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{7}{15}$$

(3)　$X_1=3$ かつ $X_2=3$ であるのは，(2，2)→(3，2)→(3，3) の場合で，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ である。

すると，(2)より $X_2=3$ となる確率は $\frac{7}{15}$ なので，$X_2=3$ であったとき $X_1=3$ である条件付き確率は，$\frac{4}{15}\div\frac{7}{15}=\frac{4}{7}$ である。

［解 説］

確率の基本問題ですが，どういう訳か，(3)で条件付き確率が必答です。

5

問題のページへ

(1)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta$ とおくと,

$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\sin^n\theta\,d\theta=-\left[\cos\theta\sin^n\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\cos\theta\sin^{n-1}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta=nI_{n-1}-nI_{n+1}$$

よって, $I_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$ となり, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$

(2)　$g(\theta)=a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta$ とおくと, $f(x)=x\displaystyle\int_0^x g(\theta)\,d\theta-\int_0^x\theta g(\theta)\,d\theta$ から,

$$f'(x)=\int_0^x g(\theta)\,d\theta+xg(x)-xg(x)=\int_0^x g(\theta)\,d\theta$$

$$=a\int_0^x\sin^{n+1}\theta\,d\theta-\int_0^x\sin^{n-1}\theta\,d\theta$$

すると, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta=aI_{n+1}-I_{n-1}$ となり,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{an}{n+1}-1\right)I_{n-1}$$

ここで, 条件より $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ であり, しかも $I_{n-1}>0$ なので,

$$\frac{an}{n+1}-1=0,\quad a=\frac{n+1}{n}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さらに, $a>\dfrac{3}{2}$ から $\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{3}{2}$ となり, $2n+2>3n$, $n<2$ である。すると, n は自然数から $n=1$ となり, $(*)$から $a=2$ である。

(3)　$n=1$, $a=2$ のとき,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(2\sin^2\theta-1)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos2\theta\,d\theta$$

$$=\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{4}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}(-1-1)=-\frac{1}{2}$$

［解 説］

定積分の計算についての有名問題です。問題文を読んだとき, $a>\dfrac{3}{2}$ という微妙な式には訳があるだろうと思いつつ, 計算を進めました。