1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある。

(1) P における C の接線の方程式を求めよ。

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\quad(-2\leqq x\leqq 4)$ とおく。

(1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α，β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ。

(2) (1)の α，β に対して，定積分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1)　$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2)　(1)の β の値をすべて求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

$x,\ y$ を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ となり，$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$ における接線の方程式は,

$$y-(s^3+as^2+bs+c)=(3s^2+2as+b)(x-s)$$
$$y=(3s^2+2as+b)x-2s^3-as^2+c$$

(2)　P における C の接線と $\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ における C の接線が平行より，$f'(s)=f'(t)$

$$3s^2+2as+b=3t^2+2at+b\ ,\ \ 3(s^2-t^2)+2a(s-t)=0$$

$s\neq t$ から，$3(s+t)+2a=0\cdots\cdots\cdots(*)$

(3)　線分 PQ の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とおくと，$(*)$から，$u=\dfrac{1}{2}(s+t)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{a}{3}$

$$v=\frac{1}{2}\{(s^3+as^2+bs+c)+(t^3+at^2+bt+c)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{(s+t)^3-3st(s+t)+a(s+t)^2-2ast+b(s+t)+2c\}$$
$$=\frac{1}{2}\Big(-\frac{8}{27}a^3+3st\cdot\frac{2}{3}a+a\cdot\frac{4}{9}a^2-2ast-b\cdot\frac{2}{3}a+2c\Big)=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$$

また，$f(u)=u^3+au^2+bu+c=-\dfrac{a^3}{27}+a\cdot\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{1}{3}ab+c=\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{1}{3}ab+c$

よって，$v=f(u)$ より，線分 PQ の中点 $\mathrm{M}(u,\ v)$ は C 上にある。

［解　説］

3 次曲線の接線について，基本を確認する問題です。

$\boxed{2}$　問題のページへ

(1)　$-2\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10$ に対して，

(i)　$-2\leqq x<0$ のとき

$$f(x)=x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=2x^2-4x-6=2(x-1)^2-8$$

(ii)　$0\leqq x<1$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=-6$$

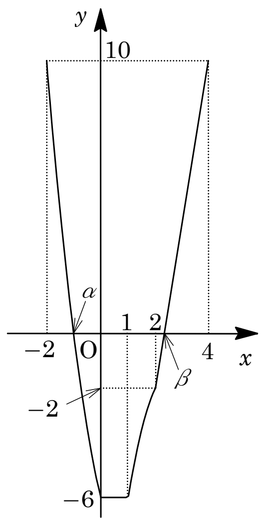
(iii)　$1\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10$$
$$=-2x^2+10x-14=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

(iv)　$2\leqq x<4$ のとき

$$f(x)=x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10=6x-14$$

(i)〜(iv)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



また，$-2\leqq x<0$ における x 軸との交点 $x=\alpha$ は，$2x^2-4x-6=0$ から $\alpha=-1$ となり，$2\leqq x<4$ における x 軸との交点 $x=\beta$ は，$6x-14=0$ から $\beta=\dfrac{7}{3}$ である。

(2)　$I=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ とおくと，I は $y=f(x)$ のグラフと x 軸ではさまれた領域の面積の符号を変えた数値となり，

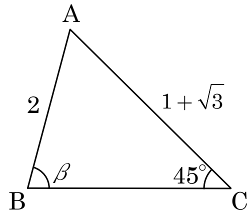
$$I=\int_{-1}^{0}(2x^2-4x-6)dx-1\cdot 6+\int_1^2(-2x^2+10x-14)dx-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot 2$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{-1}^{0}-6+\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-14x\right]_1^2-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}+2-6-6-\frac{2}{3}\cdot 7+5\cdot 3-14-\frac{1}{3}=-\frac{40}{3}$$

［解 説］

場合分けをして，絶対値つきの関数のグラフをかく問題です。なお，(2)については，計算を少し簡単にするために，長方形や三角形は符号付きの面積を対応させています。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　△ABC に正弦定理を適用して，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$ から，

$$\sin\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

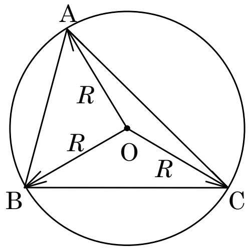
$$=1-\frac{2+\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$2<1+\sqrt{3}$ より $45^\circ<\beta$ であり，しかも $\beta<180^\circ-45^\circ=135^\circ$ から，

$$45^\circ<\beta<135^\circ,\ \ 90^\circ<2\beta<270^\circ$$

すると，$(*)$から $2\beta=150^\circ,\ 210^\circ$ なので，$\beta=75^\circ,\ 105^\circ$

(3)　△ABC は鋭角三角形なので，$\beta=75^\circ$ である。



また，O は△ABC の外接円の中心より，

$$\angle\mathrm{AOB}=2\times 45^\circ=90^\circ,\ \ \angle\mathrm{AOC}=2\beta=150^\circ$$

$$\angle\mathrm{BOC}=360^\circ-90^\circ-150^\circ=120^\circ$$

さらに，外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=2R,\ \ R=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\sqrt{2})^2\cos 90^\circ=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos 150^\circ=-\sqrt{3},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos 120^\circ=-1$$

さて，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2s,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2t$$

よって，$2s=-\sqrt{3}$，$2t=-1$ となり，$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=-\dfrac{1}{2}$

［解 説］

三角比とベクトルの融合問題です。(3)では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に注目して，内積の値で処理をしました。他にも，ベクトルの大きさに注目する方法が考えられます。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　自然数 x に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるためには，$\dfrac{3x}{x^2+2} \geqq 1$ が必要である。

$$3x \geqq x^2+2,\ \ x^2-3x+2 \leqq 0,\ \ (x-1)(x-2) \leqq 0$$

よって，$1 \leqq x \leqq 2$ となり，$x=1$ または $x=2$ である。

(i)　$x=1$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{3}{1+2}=1$ となり適する。

(ii)　$x=2$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{6}{4+2}=1$ となり適する。

(i)(ii)より，求める x は，$x=1,\ 2$ である。

(2)　自然数 x, y に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数である条件は,

(i)　$y=1$ のとき

$\dfrac{1}{y}=1$ から $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数となることより，(1)の結果から $x=1,\ 2$

(ii)　$y \geqq 2$ のとき

$0<\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{2}$ となり，(i)より $x \neq 1$，$x \neq 2$ なので，$x \geqq 3$ である。

すると，(1)の結果から $0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$ となり，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{3}{2}$ から,

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=1 \cdots\cdots\cdots (*)$$

$(*)$から，$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2}$，$y=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$

ここで，$y \geqq 2$ から $\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2} \geqq 2$ となり，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$ より,

$$x^2+2 \geqq 2(x^2-3x+2),\ \ x^2-6x+2 \leqq 0$$

よって，$3-\sqrt{7} \leqq x \leqq 3+\sqrt{7}$ となり，$x=3$ または $x=4$ または $x=5$

(ii-i)　$x=3$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{9}{11}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{11}$ であるので不適。

(ii-ii)　$x=4$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ であるので $y=3$。

(ii-iii)　$x=5$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{9}$ であるので不適。

(i)(ii)より，求める $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(4,\ 3)$ である。

［解 説］

値を絞り込むタイプの整数問題です。一見，難問そうに見える(2)では，(1)での考察がたいへん役立っています。なお，記述は省きましたが，方針を立てるとき，x に具体的な数値を入れて計算をしています。