1　解答解説のページへ

複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある。a を実数の定数とし，$w=z^2-2az+1$ とおく。

(1)　$|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。

(2)　点 z が C 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を a を用いて表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(2) ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(3) ひきだし A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

(1)　次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3+x^2-2x-1=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　方程式①の 3 つの実数解を $s,\ t,\ u$ とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　(2)の a_n がすべて整数であることを示せ。

5

解答解説のページへ

空間の 2 点 $A(0,\ 0,\ 2)$, $B(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線を l とし，2 点 $C(1,\ 0,\ 0)$, $D(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線を m とする。a を定数として，l 上にも m 上にもない点 $P(s,\ t,\ a)$ を考える。

(1) P から l に下ろした垂線と l の交点を Q とし，P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする。Q, R の座標をそれぞれ s, t, a を用いて表せ。

(2) P を中心とし，l と m がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ。

(3) $s,\ t$ と定数 a が(2)の条件を満たすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を a を用いて表せ。

1　　問題のページへ

(1) 点 z は，点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上にあるので，$|z|=2$ から，

$$|z|^2=4,\ z\bar{z}=4\ \cdots\cdots\text{①}$$

z の実部が x より，$x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ となり，$z+\bar{z}=2x\ \cdots\cdots\text{②}$

さて，条件より，a を実数の定数として，$w=z^2-2az+1$ なので，

$$\begin{aligned}|w|^2=w\bar{w}&=(z^2-2az+1)\{(\bar{z})^2-2a\bar{z}+1\}\\&=(z\bar{z})^2-2az^2\bar{z}+z^2-2az(\bar{z})^2+4a^2z\bar{z}-2az+(\bar{z})^2-2a\bar{z}+1\\&=(z\bar{z})^2-2az\bar{z}(z+\bar{z})+z^2+(\bar{z})^2+4a^2z\bar{z}-2a(z+\bar{z})+1\\&=(z\bar{z})^2-2az\bar{z}(z+\bar{z})+(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}+4a^2z\bar{z}-2a(z+\bar{z})+1\end{aligned}$$

①②を代入すると，

$$\begin{aligned}|w|^2&=4^2-2a\cdot4\cdot2x+(2x)^2-2\cdot4+4a^2\cdot4-2a\cdot2x+1\\&=4x^2-20ax+16a^2+9\ \cdots\cdots\text{③}\end{aligned}$$

(2) 点 z が C 上を一周するとき，$-2\leqq x\leqq 2$ であり，③から，

$$|w|^2=4\left(x-\frac{5}{2}a\right)^2-9a^2+9$$

(i) $\dfrac{5}{2}a<-2\ \left(a<-\dfrac{4}{5}\right)$ のとき

$|w|^2$ は，$x=-2$ のとき最小値 $16+40a+16a^2+9=(4a+5)^2$ をとる。

すると，$|w|$ の最小値は，$\sqrt{(4a+5)^2}=|4a+5|$ である。

(ii) $-2\leqq\dfrac{5}{2}a\leqq 2\ \left(-\dfrac{4}{5}\leqq a\leqq\dfrac{4}{5}\right)$ のとき

$|w|^2$ は，$x=\dfrac{5}{2}a$ のとき最小値 $-9a^2+9$ をとる。

すると，$|w|$ の最小値は，$\sqrt{-9a^2+9}=3\sqrt{-a^2+1}$ である。

(iii) $\dfrac{5}{2}a>2\ \left(a>\dfrac{4}{5}\right)$ のとき

$|w|^2$ は，$x=2$ のとき最小値 $16-40a+16a^2+9=(4a-5)^2$ をとる。

すると，$|w|$ の最小値は，$\sqrt{(4a-5)^2}=|4a-5|$ である。

［解　説］

複素数平面を題材にした問題です。(1)では，z と $\bar{z}$ の和と積に注目した解法を採用しています。また，(2)の結論は，絶対値をはずし 5 つの場合に分けて記述しても構いません。

2

問題のページへ

(1) $f(x)=\int_{-a}^{a}\left\{\dfrac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt=\dfrac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$

$$=\frac{e^{-x}}{2a}(a+a)+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt=e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$C=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+C$ ……①となり，

$$C=\int_{-a}^{a}(e^{-t}+C)\sin t\,dt=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+C\int_{-a}^{a}\sin t\,dt$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\big[\cos t\big]_{-a}^{a}=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\{\cos a-\cos(-a)\}$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$(e^{-t}\sin t)'=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$，$(e^{-t}\cos t)'=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$ より，

$$(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'=-2e^{-t}\sin t,\ \ e^{-t}\sin t=-\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'$$

すると，②から，$C=-\dfrac{1}{2}\Big[e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\Big]_{-a}^{a}$ となり，

$$C=-\frac{1}{2}\{e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\}-\frac{1}{2}\{e^{-a}\cos a-e^{a}\cos(-a)\}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-a}\sin a+e^{a}\sin a)-\frac{1}{2}(e^{-a}\cos a-e^{a}\cos a)$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$$

よって，①から，$f(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\dfrac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$

(2) $g(a)=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ なので，(1)から，$g(a)=C=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt$

$$g'(a)=e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\cdot(-1)$$

$$=(e^{-a}-e^{a})\sin a$$

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(a)$		↘		↗	

$0<a\leqq 2\pi$ のとき，$g(a)$ の増減は右表のようになる。そして，$g(a)$ は $a=\pi$ のとき最小となり，最小値は，

$$g(\pi)=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})\sin\pi+\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cos\pi=-\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

［解 説］

積分方程式の中で，(1)がいわゆる置換型，(2)がいわゆる微分型という設問内容になっています。ただ，計算は有名な部分積分ですが，面倒ですので工夫をしています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　ひきだしAのメダルの色の種類について，その組の総数は$3^3=27$通りである。

そして，色が 2 種類であるのは，金と銀のみ，銀と銅のみ，金と銅のみの場合があり，合わせて$(2^3-2)\times 3=18$通りとなるので，その確率は$\dfrac{18}{27}=\dfrac{2}{3}$である。

(2)　ひきだし A, B をあわせたとき，メダルの色の種類について，その組の総数は$3^3\times 2^2=27\times 4$通りである。

そして，A, Bをあわせたとき，メダルの色が2種類であるのは，

(i)　金と銀のみのとき　(1)と同様に考えると，$2^5-2=30$通りの場合がある。

(ii)　金と銅のみのとき

Bはともに金の場合しかなく，またAは金または銅かつ金のみでない場合となり，$(2^3-1)\times 1=7$通りの場合がある。

(iii) 銀と銅のみのとき　(ii)と同様に考えると，7通りの場合がある。

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\dfrac{30+7+7}{27\times 4}=\dfrac{11}{27}$である。

(3)　ひきだしAのメダルが，金a枚，銀b枚，銅c枚のとき$A=(a,\ b,\ c)$，ひきだしBのメダルが，金d枚，銀e枚のとき$B=(d,\ e)$と表す。

さて，A, Bをあわせてちょうど3枚の金メダルが入っているのは，

(i)　$A=(1,\ 2,\ 0)$かつ$B=(2,\ 0)$のとき　$3\times 1=3$通り

(ii)　$A=(1,\ 0,\ 2)$かつ$B=(2,\ 0)$のとき　$3\times 1=3$通り

(iii)　$A=(1,\ 1,\ 1)$かつ$B=(2,\ 0)$のとき　$3!\times 1=6$通り

(iv)　$A=(2,\ 1,\ 0)$かつ$B=(1,\ 1)$のとき　$3\times 2!=6$通り

(v)　$A=(2,\ 0,\ 1)$かつ$B=(1,\ 1)$のとき　$3\times 2!=6$通り

(vi)　$A=(3,\ 0,\ 0)$かつ$B=(0,\ 2)$のとき　$1\times 1=1$通り

(i)～(vi)より，金メダルが3枚の確率は，$\dfrac{3+3+6+6+6+1}{27\times 4}=\dfrac{25}{108}$

その中でAのメダルの色が2種類であるのは，(i)(ii)(iv)(v)のときより，その確率は$\dfrac{3+3+6+6}{27\times 4}=\dfrac{18}{108}$である。

したがって，求める確率は，$\dfrac{18}{108}\div\dfrac{25}{108}=\dfrac{18}{25}$となる。

［解　説］

注意深さの問われる確率問題です。(3)は，現行課程で出題範囲に，再度，仲間入りした「条件付き確率」の設問です。

4

問題のページへ

(1)　$x^3+x^2-2x-1=0\cdots\cdots$①に対して，$f(x)=x^3+x^2-2x-1$とおくと，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ f(-1)=1>0,\ f(0)=-1<0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

よって，3次方程式①は，$x<-1$，$-1<x<0$，$0<x$に1つずつ実数解をもつ。

(2)　方程式①の解をs, t, uとすると，$s^3+s^2-2s-1=0$から，nを自然数として，

$$s^{n+2}+s^{n+1}-2s^n-s^{n-1}=0,\ \frac{s^{n+2}+s^{n+1}-2s^n-s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}=0\cdots\cdots\cdots②$$

同様に，$\dfrac{t^{n+2}+t^{n+1}-2t^n-t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}=0\cdots\cdots$③，$\dfrac{u^{n+2}+u^{n+1}-2u^n-u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}=0\cdots\cdots$④

ここで，$a_n=\dfrac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\dfrac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\dfrac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}$なので，②③④の両辺を加えると，

$$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　a_nがすべて整数であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2,\ 3$のとき

$$a_1=\frac{1}{(s-t)(s-u)}+\frac{1}{(t-u)(t-s)}+\frac{1}{(u-s)(u-t)}$$
$$=\frac{-(t-u)-(u-s)-(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0$$

$$a_2=\frac{s}{(s-t)(s-u)}+\frac{t}{(t-u)(t-s)}+\frac{u}{(u-s)(u-t)}$$
$$=\frac{-s(t-u)-t(u-s)-u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-st+su-tu+ts-us+ut}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0$$

$$a_3=\frac{s^2}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^2}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^2}{(u-s)(u-t)}$$
$$=\frac{-s^2(t-u)-t^2(u-s)-u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-s^2t+s^2u-t^2u+t^2s-u^2s+u^2t}{(s-t)(t-u)(u-s)}$$
$$=\frac{-(s-t)u^2+(s^2-t^2)u-st(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-(s-t)(u-s)(u-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=1$$

(ii)　$n=k,\ k+1,\ k+2$のとき

a_k，a_{k+1}，a_{k+2}が整数と仮定すると，⑤から$a_{k+3}=-a_{k+2}+2a_{k+1}+a_k$となり，$a_{k+3}$も整数となる。

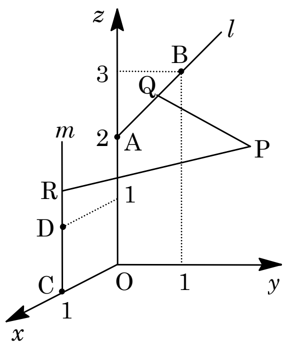
(i)(ii)より，a_nはすべて整数である。

［解　説］

漸化式と整数の融合である(3)がメインですが，(2)の誘導から方針は明快です。ただ，a_1，a_2，a_3の計算は，その取りかかりに引くところがありました。

5

問題のページへ



(1)　点$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 3)$を通る直線 l は，q を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 1)$から，

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+q(0,\ 1,\ 1)$$

点$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ 0,\ 1)$を通る直線 m は，r を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(0,\ 0,\ 1)$から，

$$m:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+r(0,\ 0,\ 1)$$

ここで，l 上の点$\mathrm{Q}(0,\ q,\ 2+q)$，m 上の点$\mathrm{R}(1,\ 0,\ r)$，l 上にも m 上にもない点$\mathrm{P}(s,\ t,\ a)$に対して，条件より，$\mathrm{PQ}\perp l$かつ$\mathrm{PR}\perp m$なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(q-t)+(2+q-a)=0,\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=r-a=0$$

よって，$q=\dfrac{t+a-2}{2}$，$r=a$となり，

$$\mathrm{Q}\Big(0,\ \frac{t+a-2}{2},\ \frac{t+a+2}{2}\Big),\ \mathrm{R}(1,\ 0,\ a)$$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\Big(-s,\ -\dfrac{t-a+2}{2},\ \dfrac{t-a+2}{2}\Big)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-s+1,\ -t,\ 0)$となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=s^2+\frac{(t-a+2)^2}{4}+\frac{(t-a+2)^2}{4}=s^2+\frac{1}{2}t^2-(a-2)t+\frac{1}{2}a^2-2a+2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=(-s+1)^2+t^2=s^2-2s+t^2+1$$

そして，Pを中心とし，l と m がともに接するような球面が存在するための条件は，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|$から，$s^2+\dfrac{1}{2}t^2-(a-2)t+\dfrac{1}{2}a^2-2a+2=s^2-2s+t^2+1$となり，

$$4s=t^2+2(a-2)t-a^2+4a-2\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$(*)$より，$4s=(t+a-2)^2-2a^2+8a-6$となり，

$$(t+a-2)^2=4s+2a^2-8a+6,\ (t+a-2)^2=4\Big(s+\frac{a^2-4a+3}{2}\Big)$$

すると，st 平面上で点$(s,\ t)$は放物線を描き，焦点は$\Big(-\dfrac{a^2-4a+3}{2}+1,\ -a+2\Big)$すなわち$\Big(-\dfrac{a^2}{2}+2a-\dfrac{1}{2},\ -a+2\Big)$，また準線は$s=-\dfrac{a^2-4a+3}{2}-1$すなわち$s=-\dfrac{a^2}{2}+2a-\dfrac{5}{2}$である。

［解 説］

空間図形と 2 次曲線の融合問題です。基本事項の確認が主ですが，計算はやや面倒です。