$\boxed{1}$　解答解説のページへ

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3)　次の定積分の値を求めよ。　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする△OAB がある。ただし, O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を, それぞれα, β, zとするとき, $\alpha\beta = z$が成り立つとする。

(1) 複素数αの満たすべき条件を求め, 点 A(α) が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 P(z) の存在範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。

4

解答解説のページへ

さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1)　$p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2)　p_9 の値を求めよ。

(3)　p_3 の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2) を頂点とする△ABC の内部および境界を T とおく。実数 a に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$ を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする。ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ。

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき，

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n\geqq 1$，$2k-1\geqq 1$ より，$(2k-1)n\geqq 2k-1$ となり，

$$a\geqq k^2+2k-1 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) n が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき，$n(n+1)+14>n^2$ より，①から，

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \text{（k は自然数）} \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，②から，$14\geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-15\leqq 0$

$$(k+5)(k-3)\leqq 0,\ -5\leqq k\leqq 3$$

k は自然数から，$k=1,\ 2,\ 3$ となる。

(i) $k=1$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり，$n=13$

(ii) $k=2$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり，$n=\dfrac{10}{3}$ より不適

(iii) $k=3$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり，$n=1$

(i)～(iii)より，$n=1,\ 13$ である。

［解 説］

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=1+\sin x-x\cos x$ に対して，$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

すると，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。これより，$f(x)$ は $x=\pi$ のとき最大値 $1+\pi$，$x=2\pi$ のとき最小値 $1-2\pi$ をとる。

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1+\pi$	$\searrow$	$1-2\pi$

(2)　$F(x)=\int f(x)dx$ とおき，C を積分定数とすると，

$$F(x)=\int(1+\sin x-x\cos x)dx=x-\cos x-x\sin x+\int\sin x\,dx$$
$$=x-\cos x-x\sin x-\cos x+C=x-x\sin x-2\cos x+C$$

(3)　$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$ より，$0\leqq x<\frac{3}{2}\pi$ で $f(x)>0$，$\frac{3}{2}\pi<x\leqq 2\pi$ で $f(x)<0$ なので，

$I=\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$ とおくと，

$$I=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}-f(x)dx=F\left(\frac{3}{2}\pi\right)-F(0)-F(2\pi)+F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$=2F\left(\frac{3}{2}\pi\right)-F(0)-F(2\pi)=2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi\right)-(-2)-(2\pi-2)=4\pi+4$$

［解　説］

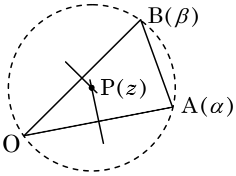
定積分の計算問題です。(3)は $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$ を見つけるのがポイントですが，これは(1)の増減表と $f(x)$ の形から判断します。

3

問題のページへ

(1)　原点O，点A(α)，点B(β)を頂点とする△OABについて，

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \alpha \neq \beta \cdots\cdots\cdots①$$



このとき，点P(z)は△OABの外心なので，辺OAおよび辺OBの垂直二等分線の交点となり，

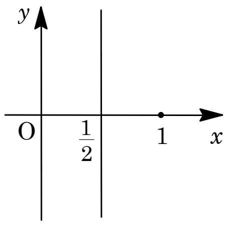
$$|z| = |z-\alpha| \cdots\cdots\cdots②,\ |z| = |z-\beta| \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$z = \alpha\beta$を②に代入すると，$|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha|$となり，①から$|\alpha| \neq 0$より，

$$|\alpha||\beta| = |\alpha||\beta - 1|,\ |\beta| = |\beta - 1| \cdots\cdots\cdots④$$

同様に，$z = \alpha\beta$を③に代入すると，$|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \beta|$となり，①から$|\beta| \neq 0$より，

$$|\alpha||\beta| = |\alpha - 1||\beta|,\ |\alpha| = |\alpha - 1| \cdots\cdots\cdots⑤$$



④⑤より，点A(α)，点B(β)は，ともに原点と点1を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし，①から$\alpha \neq \beta$である。

以上より，αの満たすべき条件は$|\alpha| = |\alpha - 1|$であり，点A(α)の描く図形は右図の直線である。

(2)　(1)より，$\alpha = \dfrac{1}{2} + ai$，$\beta = \dfrac{1}{2} + bi$　$(a \neq b)$とおくことができ，

$$z = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2} + ai\right)\left(\frac{1}{2} + bi\right) = \left(\frac{1}{4} - ab\right) + \frac{1}{2}(a+b)i$$

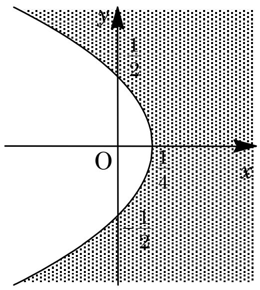
ここで，$z = x + yi$とおくと，$x = \dfrac{1}{4} - ab$，$y = \dfrac{1}{2}(a+b)$となり，

$$a + b = 2y \cdots\cdots\cdots⑥,\ ab = \frac{1}{4} - x \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，a，b $(a \neq b)$は，tについての2次方程式$t^2 - 2yt + \left(\dfrac{1}{4} - x\right) = 0$の異なる実数解となり，その条件は，

$$D/4 = y^2 - \left(\frac{1}{4} - x\right) > 0,\ y^2 > -\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

よって，点P(z)の存在範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

複素数と図形に領域が絡んだ問題です。(1)は共役複素数を用いた形で，$\alpha + \overline{\alpha} = 1$を結論としてもよいでしょう。なお，O，A，Bが一直線上にないということについては，(1)の結果から満たしていることがわかります。

4　　問題のページへ

(1)　さいころを投げ，数直線上で初め原点にいた点 P を，出た目の数だけ正の向きに移動させる。そして，点 P が 10 に達するか越えた時点で終了する。このとき，k 回目終了後の点 P の位置を X_k とおく。

さて，$X_9 \geqq 9$ より，10 回目で終了する場合は，$X_9 = 9$ すなわち 9 回目まで 1 の目が出て，10 回目が任意なので，その確率 p_{10} は，

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9 \times 1 = \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(2)　$X_8 \geqq 8$ より，9 回目で終了する場合は，$X_8 = 8,\ 9$ である。

(i)　$X_8 = 8$ のとき　このとき，8 回目までは 1 の目が出て，9 回目は 2 以上の目なので，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^8 \times \frac{5}{6} = 5\left(\frac{1}{6}\right)^9$ となる。

(ii)　$X_8 = 9$ のとき　このとき，8 回目までは 1 の目が 7 回，2 の目が 1 回出て，9 回目は任意なので，その確率は ${}_8\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^7 \frac{1}{6} \times 1 = 8\left(\frac{1}{6}\right)^8$ となる。

(i)(ii)より，9 回目で終了する確率 p_9 は，

$$p_9 = (5 + 8\cdot 6)\left(\frac{1}{6}\right)^9 = 53\left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(3)　$2 \leqq X_2 \leqq 12$ であるが，3 回目で終了する場合は，$4 \leqq X_2 \leqq 9$ となる。

ここで，1 回目と 2 回目の目の数とその和をまとめると右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(i)　$X_2 = 4$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 3 通りで，3 回目は 6 なので，その確率は $3\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = 3\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(ii)　$X_2 = 5$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 4 通りで，3 回目は 5 または 6 なので，その確率は $4\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{2}{6} = 8\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(iii)　$X_2 = 6$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 5 通りで，3 回目は 4 以上なので，その確率は $5\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{3}{6} = 15\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(iv)　$X_2 = 7$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 6 通りで，3 回目は 3 以上なので，その確率は $6\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{4}{6} = 24\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(v)　$X_2 = 8$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 5 通りで，3 回目は 2 以上なので，その確率は $5\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = 25\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(vi) $X_2=9$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 4 通りで，3 回目は任意なので，その確率は $4\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\times 1=4\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$ となる。

(i)～(vi)より，3 回目で終了する確率 p_3 は，

$$p_3=(3+8+15+24+25+4\cdot 6)\left(\frac{1}{6}\right)^3=99\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{11}{24}$$

［解　説］

確率の基本的な問題ですが，注意力が要求されます。解答例のように，表を作った方が安心です。

5

問題のページへ

(1)　3 点 A$(1,\ 0)$，B$(3,\ 1)$，C$(2,\ 2)$ に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\leqq a$ を満たす点 P$(x,\ y)$ 全体を D とすると，

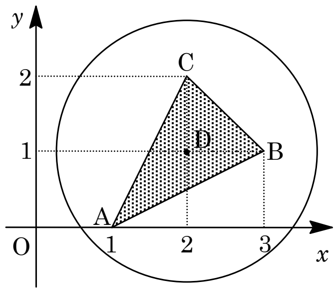
$$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2\leqq a$$

$$3x^2+3y^2-12x-6y\leqq a-19,\ x^2+y^2-4x-2y\leqq\frac{a-19}{3}$$

変形すると，$D:(x-2)^2+(y-1)^2\leqq\dfrac{a-4}{3}$ ………①

すると，D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲は，$\dfrac{a-4}{3}\geqq 0$ より $a\geqq 4$ である。

(2)　△ABC の内部および境界 T を図示すると，右図の網点部となる。また，$a\geqq 4$ のとき，①から D は中心 D$(2,\ 1)$ で半径 $\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$ の内部または周上である。



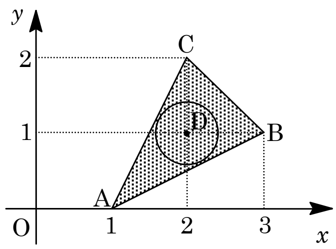
すると，D が T を含む条件は，$\mathrm{AD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BD}=1$，$\mathrm{CD}=1$ より，

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\geqq\sqrt{2},\ a\geqq 10$$

(3)　点 D と直線 AB, BC, CA の距離をそれぞれ d_1，d_2，d_3 とおく。このとき，AB$:x-2y-1=0$ より，

$$d_1=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

また，対称性より，$d_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$d_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。



すると，$a\geqq 4$ のとき D が T に含まれる条件は，

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\leqq\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\leqq a-4\leqq\frac{3}{5},\ 4\leqq a\leqq\frac{23}{5}$$

［解　説］

領域が題材の基本題です。円や三角形に対称性が設定されているので，計算も簡単です。