1

解答解説のページへ

座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$ に対し，$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。ただし，O は原点，s と t は実数とする。

(1) $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を $s,\ t$ で表せ。

(2) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\dfrac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。

(3) s と t が実数を動くとき，$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$z+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1)　D を複素数平面上に図示せよ。

(2)　k を実数とする。D に属する z で方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。

3

解答解説のページへ

数字の 2 が書かれたカードが 2 枚，同様に，数字の 0, 1, 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，あわせて 8 枚のカードがある。これから 4 枚を取り出し，横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし，0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は，n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば，左から順に 0, 0, 1, 1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

(1) a，b，c，d は整数とする。$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3) n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(11,\ 11)$ がある。条件 $\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$ を満たす点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の全体を D とする。

(1) D を座標平面上に図示せよ。また，$\mathrm{BQ} = \mathrm{OQ} = 2\mathrm{AQ}$ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2) $0 < p \leqq 11$ とし，P を点 $(p,\ 11)$ とする。条件 $\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。

5

解答解説のページへ

2 つの関数 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}-\dfrac{\pi}{2}$ がある。

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $g(x) \leqq f(x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$，

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1\right)$なので，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=2$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-1$$

ここで，$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$から，

$$|\vec{p}|^2=(1-t)^2\cdot 1+2t(1-t)\cdot 0+t^2\cdot 1=2t^2-2t+1,\ |\vec{p}|=\sqrt{2t^2-2t+1}$$

$$|\vec{q}|^2=(1-s)^2\cdot 2+2s(1-s)\cdot 0+s^2\cdot 2=4s^2-4s+2,\ |\vec{q}|=\sqrt{4s^2-4s+2}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=(1-t)(1-s)\cdot 0+(1-t)s\cdot 0+t(1-s)\cdot(-1)+ts\cdot(-1)=-t$$

(2) $t=\dfrac{1}{2}$のとき，(1)より，$|\vec{p}|=\sqrt{2\cdot\dfrac{1}{4}-2\cdot\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\vec{p}\cdot\vec{q}=-\dfrac{1}{2}$となり，

$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{4s^2-4s+2}\cdot\cos\frac{3}{4}\pi,\ \sqrt{4s^2-4s+2}=1$$

すると，$4s^2-4s+1=0$すなわち$(2s-1)^2=1$となり，$s=\dfrac{1}{2}$である。

(3) (1)から，$|\vec{p}-\vec{q}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=(2t^2-2t+1)+2t+(4s^2-4s+2)$となり，

$$|\vec{p}-\vec{q}|^2=2t^2+4s^2-4s+3=2t^2+4\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+2$$

これより，$t=0$，$s=\dfrac{1}{2}$のとき，$|\vec{p}-\vec{q}|$は最小値$\sqrt{2}$をとる。

［解 説］

ベクトルの内積についての成分計算という内容です。

2

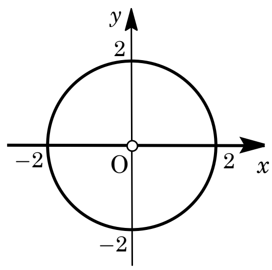
問題のページへ

(1)　$z\neq 0$ のとき，$z+\dfrac{4}{z}$ が実数なので，$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$ となり，

$$z\overline{z}(z-\overline{z})+4(\overline{z}-z)=0,\ (z-\overline{z})(z\overline{z}-4)=0$$

$$(z-\overline{z})(|z|^2-4)=0$$

よって，$z=\overline{z}$ または $|z|=2$ から，z は 0 でない実数または絶対値が 2 の複素数である。これを複素数平面上に図示すると，右図の太線部となる。ただし，原点は除く。



(2)　k を実数とし，方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ ……①に対して，(1)から，

(i)　z が実数 $(z\neq 0)$ のとき

$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$ および $z-\dfrac{4}{z}$ は実数より，$z-\dfrac{4}{z}\neq 0$ のときは①が成立しない。

すると，$z-\dfrac{4}{z}=0$ から $z=\pm 2$ となり，このとき $k=0$ である。

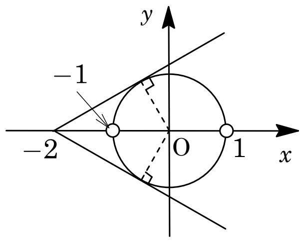
(ii)　z が $|z|=2$ を満たす虚数のとき

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(\sin\theta\neq 0)$ と表せ，$\dfrac{4}{z}=2(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$z+\frac{4}{z}=4\cos\theta,\ z-\frac{4}{z}=4i\sin\theta$$

①に代入すると，$k(4\cos\theta+8)=-4\sin\theta$，$k=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+2}$ ………②

②から，$-k=\dfrac{\sin\theta-0}{\cos\theta-(-2)}$ と表せ，$-k$ は原点が中心の単位円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $(-2,\ 0)$ を結ぶ線分の傾きとなる。



そこで，$\sin\theta\neq 0$ に注意し，右図の円の接線と x 軸のなす角が $\pm 30°$ から，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq -k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(k\neq 0)$ となり，

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}\quad (k\neq 0)$$

(i)(ii)より，①が成り立つ k の値の範囲は，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

［解 説］

複素数についての総合的な問題です。(1)では「z が実数 $\Leftrightarrow$ $z=\overline{z}$」に着目して数式処理をしています。また，(2)は①式の形から極形式を設定しました。なお，後半は微分法の利用でも構いませんが，上記の線分の傾きを対応させる方法も有名です。

3　　問題のページへ

(1)　a, b, c, d を整数とするとき，

$$1000a+100b+10c+d=9(111a+11b+c)+(a+b+c+d)$$

すると，$9(111a+11b+c)$ は 9 の倍数なので，$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値である。

(2)　数字の 0, 1, 2, 8 の書かれたカードが 2 枚ずつ，あわせて 8 枚のカードから，4 枚を取り出し，横一列に並べる。そして，このときできる自然数を n とする。

まず，${}_8\mathrm{C}_4\times4!=70\times4!$ 通りが同様に確からしいとする。

ここで，n が 9 の倍数であるのは，(1)から各位の和は 18 または 9 である。

(i)　各位の和が 18 のとき

1, 1, 8, 8 または 0, 2, 8, 8 のカードを並べることが対応し，その確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times4!}{70\times4!}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times4!}{70\times4!}=\frac{5}{70}$$

(ii)　各位の和が 9 のとき

0, 0, 1, 8 のカードを並べることが対応し，その確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times4!}{70\times4!}=\frac{4}{70}$$

(i)(ii)より，n が 9 の倍数である確率は，$\dfrac{5}{70}+\dfrac{4}{70}=\dfrac{9}{70}$ である。

(3)　n が偶数となるのは一の位が 0, 2, 8 のいずれかより，その確率は，

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_1\times{}_7\mathrm{P}_3}{70\times4!}=\frac{1260}{70\times4!}$$

また，n が偶数かつ 9 の倍数となるとき，その確率は，

(i)　1, 1, 8, 8 または 0, 2, 8, 8 のとき

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{P}_1\times3!}{70\times4!}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times4!}{70\times4!}=\frac{108}{70\times4!}$$

(ii)　0, 0, 1, 8 のとき

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{P}_1\times3!}{70\times4!}=\frac{72}{70\times4!}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{108}{70\times4!}+\dfrac{72}{70\times4!}=\dfrac{180}{70\times4!}$ となる。

したがって，n が偶数であったとき，n が 9 の倍数である条件付き確率は，

$$\frac{180}{70\times4!}\div\frac{1260}{70\times4!}=\frac{1}{7}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。なお，8 枚のカードはすべて異なるとして数えています。

4

問題のページへ

(1) 点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}(11,\ 11)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$に対して，まず$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ}$から，

$$(x-11)^2+(y-11)^2 \geqq x^2+y^2,\ x+y \leqq 11 \cdots\cdots\text{①}$$

次に，$\mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$より，$x^2+y^2 \geqq 4\left\{\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+y^2\right\}$となり，

$$x^2+y^2-20x+75 \leqq 0,\ (x-10)^2+y^2 \leqq 25 \cdots\cdots\text{②}$$

そして，①②の境界線の交点は，$x+y=11$と$x^2+y^2-20x+75=0$を連立し，

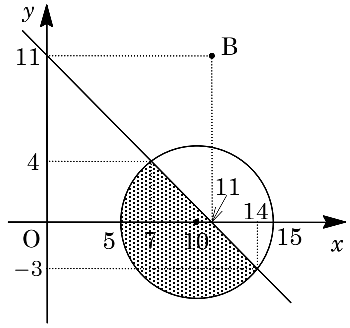
$$x^2+(11-x)^2-20x+75=0,\ x^2-21x+98=0$$

すると，$(x-7)(x-14)=0$から，$x=7,\ 14$となり，

$$(x,\ y)=(7,\ 4),\ (14,\ -3)$$

よって，$\mathrm{BQ} \geqq \mathrm{OQ} \geqq 2\mathrm{AQ}$を満たす点 Q の全体 D は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

また，$\mathrm{BQ}=\mathrm{OQ}=2\mathrm{AQ}$となる点 Q の座標は，$(7,\ 4)$，$(14,\ -3)$である。



(2) $0<p \leqq 11$で点$\mathrm{P}(p,\ 11)$に対し，$\mathrm{OQ} \geqq \mathrm{PQ}$より，

$$x^2+y^2 \geqq (x-p)^2+(y-11)^2,\ 2px+22y \geqq p^2+121 \cdots\cdots\text{③}$$

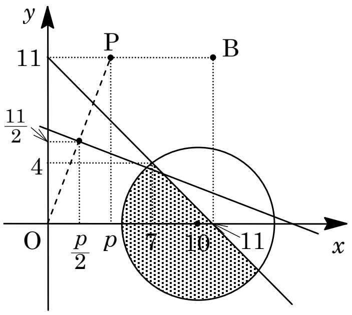
すると，領域③の境界線は線分 OP の垂直二等分線，すなわち点$\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{11}{2}\right)$を通る傾き$-\dfrac{p}{11}$の直線であり，領域③はこの直線について O と反対側である。

ここで，$-1 \leqq -\dfrac{p}{11} < 0$より，領域③を満たす D の点 Q が存在する条件は，点$(7,\ 4)$が③に含まれることであり，

$$14p+88 \geqq p^2+121,\ p^2-14p+33 \leqq 0$$

すると，$(p-3)(p-11) \leqq 0$となり，$3 \leqq p \leqq 11$である。

なお，この値の範囲は$0<p \leqq 11$を満たしている。

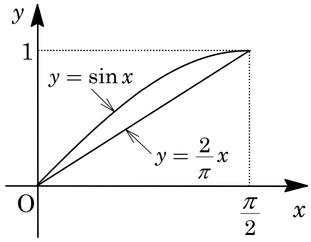


［解 説］

不等式と領域が題材の問題です。(2)は数式処理だけでなく，その意味も加味して記述した方がよいでしょう。直感的な部分は残ってしまいますが。

5　　　　問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y=\sin x$ は単調増加し，そのグラフは上に凸である。また，$y=\dfrac{2}{\pi}x$ のグラフは，原点と点$\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$を結ぶ線分である。



すると，$\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$が成立する。

(2)　$f(x)=\cos x$，$g(x)=\sqrt{\dfrac{\pi^2}{2}-x^2}-\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。

$$h(x)=\cos x-\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}+\frac{\pi}{2},\ h'(x)=-\sin x+\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}$$

ここで，(1)から，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\sin x \leqq -\dfrac{2}{\pi}x$ となるので，

$$h'(x) \leqq -\frac{2}{\pi}x+\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}}=\frac{x}{\pi}\left(-2+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}}\right)$$

$0 \leqq \dfrac{x}{\pi} \leqq \dfrac{1}{2}$ から $\dfrac{1}{2} \leqq \sqrt{\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$\dfrac{x}{\pi}\left(-2+\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}}\right) \leqq 0$

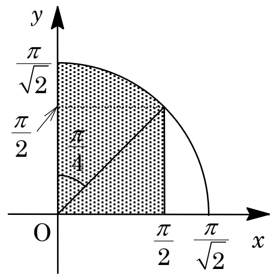
よって，$h'(x) \leqq 0$ となり，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $h(x) \geqq h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=0$ から，

$$g(x) \leqq f(x)$$

(3)　曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および y 軸が囲む部分の面積 S は，(2)から，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2}dx$$

ここで，定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\pi^2}{2}-x^2}\,dx$ の値は，右図の網点部の面積が対応することより，



$$S=1-\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=1-\frac{\pi^3}{16}-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{4}=1+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^3}{16}$$

［解　説］

微分の応用と定積分と面積についての融合問題です。(1)は，(2)と同様に処理ができますが，(2)の前座のような雰囲気でしたので，グラフを示して終わりとしています。