1

解答解説のページへ

p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ -2,\ 1)$, $\mathrm{P}(p,\ -1,\ 2)$ があり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。また, 点 P から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2) 点 Q が $\triangle\mathrm{OAB}$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とし，$a_n = n(n+1)$ とする。さらに，a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

(1)　d_n は偶数であることを示せ。

(2)　d_n は 8 で割り切れないことを示せ。

(3)　p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ。

(4)　$d_n \leqq 12$ を示せ。また，$d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

3

解答解説のページへ

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。0, $\dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数 $f(x)=\dfrac{x+t}{x(1-tx)}$ を考える。

(1)　$f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。

(2)　$f(x)$ の極大値を与える x の値を α, 極小値を与える x の値を β とし, 座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ をとる。t が $0<t<1$ を満たしながら変化するとき, 線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり，どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち，A は箱 X から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し，もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば，その札を箱 Y に戻し，再び箱 Y から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を B の得点とする。

(1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。

(2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

$f(x)$ を区間 $[0,\ \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$ を関係式

$$f_1(x)=f(x),\quad f_{n+1}(x)=2\cos x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。さらに，自然数 n に対して

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$$

とおく。

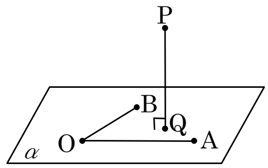
(1)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2)　$c_n=a_n-1$ とおく。このとき，$c_{n+2}=-c_n$ が成立することを示し，一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。

(3)　a_n，b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。

1

問題のページへ



(1)　3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p,\ -1,\ 2)$ に対し，

点 Q は原点 O, A, B で定まる平面 α 上にあるので，実数 a, b を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せ,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，$\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ となり，

$$a(1+4)+b(-2-4)-(-p-2)=0\,,\ 5a-6b=-p-2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，$\left(a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ となり，

$$a(-2-4)+b(4+4+1)-(2p+2+2)=0\,,\ -6a+9b=2p+4\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$3a=3(-p-2)+2(2p+4)$ となり，$a=\dfrac{p+2}{3}$

$$b=\frac{1}{9}(2p+4+2p+4)=\frac{4p+8}{9}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{p+2}{3}(-1,\ 2,\ 0)+\dfrac{4p+8}{9}(2,\ -2,\ 1)=\dfrac{p+2}{9}(-3+8,\ 6-8,\ 4)$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{5p+10}{9},\ \dfrac{-2p-4}{9},\ \dfrac{4p+8}{9}\right)$ となる。

(2)　点 Q が△OAB の周または内部にある条件は，$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，$a+b\leqq 1$ なので，

$$\frac{p+2}{3}\geqq 0\cdots\cdots③,\ \ \frac{4p+8}{9}\geqq 0\cdots\cdots④,\ \ \frac{p+2}{3}+\frac{4p+8}{9}\leqq 1\cdots\cdots⑤$$

③から $p\geqq -2$ となり，この範囲は④を満たす。

⑤から $3(p+2)+4p+8\leqq 9$ となり，$p\leqq -\dfrac{5}{7}$ である。

よって，$p<0$ と合わせて，求める p の範囲は $-2\leqq p\leqq -\dfrac{5}{7}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの応用に関する基本問題です。計算も複雑ではありません。文系では，(1)が誘導つきの設問になっています。

2

問題のページへ

(1)　連続 2 整数の積 $a_n=n(n+1)$ と $a_{n+3}=(n+3)(n+4)$ は，ともに偶数なので，a_n と a_{n+3} の最大公約数 d_n は偶数である。

(2)　d_n が 8 で割り切れると仮定すると，a_n と a_{n+3} はともに 8 で割り切れ，

$$n(n+1)=8k\cdots\cdots①,\ (n+3)(n+4)=8l\cdots\cdots②\ （k\text{ と }l\text{ は自然数}）$$

(i)　n が偶数のとき

$n+1$，$n+3$ は奇数となり，①から n が 8 の倍数，②から $n+4$ が 8 の倍数となるが，$(n+4)-n=4$ から，n と $n+4$ がともに 8 の倍数になることはない。

(ii)　n が奇数のとき

$n+4$ は奇数となり，①から $n+1$ が 8 の倍数，②から $n+3$ が 8 の倍数となるが，$(n+3)-(n+1)=2$ から，$n+1$ と $n+3$ がともに 8 の倍数になることはない。

(i)(ii)より，n の偶奇にかかわらず，d_n は 8 で割り切れない。

(3)　5 以上の素数 p に対し，d_n が p で割り切れると仮定すると，a_n と a_{n+3} はともに p で割り切れ，しかも p が 5 以上の奇数であることに注意して，

$$n(n+1)=pk'\cdots\cdots③,\ (n+3)(n+4)=pl'\cdots\cdots④\ （k'\text{ と }l'\text{ は自然数}）$$

(i)　n が偶数のとき

$n+4$ は偶数となり，③から $n+1$ が p の倍数，④から $n+3$ が p の倍数となるが，$(n+3)-(n+1)=2$ から，$n+1$ と $n+3$ がともに p の倍数になることはない。

(ii)　n が奇数のとき

$n+1$，$n+3$ は偶数となり，③から n が p の倍数，④から $n+4$ が p の倍数となるが，$(n+4)-n=4$ から，n と $n+4$ がともに p の倍数になることはない。

(i)(ii)より，n の偶奇にかかわらず，d_n は p で割り切れない。

(4)　まず，(2), (3)と同様にして，d_n が 9 で割り切れないことを示す。

そこで，d_n が 9 で割り切れると仮定すると，a_n と a_{n+3} はともに 9 で割り切れ，

$$n(n+1)=9k''\cdots\cdots⑤,\ (n+3)(n+4)=9l''\cdots\cdots⑥\ （k''\text{ と }l''\text{ は自然数}）$$

(i)　n が偶数のとき

$n+4$ は偶数となり，⑤から $n+1$ が 9 の倍数，⑥から $n+3$ が 9 の倍数となるが，$(n+3)-(n+1)=2$ から，$n+1$ と $n+3$ がともに 9 の倍数になることはない。

(ii)　n が奇数のとき

$n+1$，$n+3$ は偶数となり，⑤から n が 9 の倍数，⑥から $n+4$ が 9 の倍数となるが，$(n+4)-n=4$ から，n と $n+4$ がともに 9 の倍数になることはない。

(i)(ii)より，n の偶奇にかかわらず，d_n は 9 で割り切れない。

以上より，d_n は 8 の倍数でない偶数であり，しかも 5 以上の素数 p および $9=3^2$ の倍数でないことから，d_n を素因数分解すると，

$$d_n = 2^i \cdot 3^j \quad (1 \leqq i \leqq 2,\ 0 \leqq j \leqq 1)$$

これより，$d_n \leqq 2^2 \cdot 3^1 = 12$となる。

また，$d_n = 12$の場合は，a_nとa_{n+3}がともに12の倍数になり，その差をとると，

$$a_{n+3} - a_n = (n+3)(n+4) - n(n+1) = 6n + 12 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

すると，⑦から$6n+12$は 12 の倍数になることが必要なので，n が偶数の場合を小さい方から調べていくと，$n = 8$で，

$$a_8 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2,\ a_{11} = 11 \cdot 12 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

よって，$d_n = 12$となる 1 つの n の値は$n = 8$である。

［解 説］

整数を題材にした論証問題です。(1)の役割は(4)への誘導で，証明自体は明らかといってもよいぐらいのものです。また, (2), (3), (4)は, n を偶奇に分けるという同じスタイルで記述しています。老いの繰り言のようですが。なお, (4)の冒頭の「d_nが 9 で割り切れない」という予測は，$d_n \leqq 12$という結論より絞り込んだものです。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{x+t}{x(1-tx)}=\dfrac{x+t}{x-tx^2}\ (0<t<1)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}=\frac{tx^2+2t^2x-t}{x^2(1-tx)^2}=\frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}$$

ここで，$g(x)=x^2+2tx-1$ とおき，$g(x)=0$ の解を $x=\alpha'$，β' とすると，

$$\alpha'=-t-\sqrt{t^2+1},\ \beta'=-t+\sqrt{t^2+1}\quad(\alpha'<\beta')$$

そして，$g(0)=-1<0$，$g\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{t^2}+1>0$ に注意すると，$\alpha'<0<\beta'<\dfrac{1}{t}$ から，

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=\alpha'$ で極大値，$x=\beta'$ で極小値をとる。

x	$\cdots$	α'	$\cdots$	0	$\cdots$	β'	$\cdots$	$\frac{1}{t}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$

(2)　条件より，$\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$ となり，$\alpha+\beta=-2t$，$\alpha\beta=-1$ である。

さて，2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ の中点 $\mathrm{M}(x,\ y)$ に対し，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-2t}{2}=-t\cdots\cdots\cdots①$$

$$y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)}+\frac{\beta+t}{\beta(1-t\beta)}\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}\left\{\frac{-1}{\alpha(1-t\alpha)}+\frac{1}{\beta(1-t\beta)}\right\}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}\cdot\frac{-\beta+\alpha+t(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha\beta\{1-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta t^2\}}$$

$$=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{t^2+1}(-1-2t^2)}{1+2t^2-t^2}=1+2t^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$y=1+2(-x)^2=1+2x^2$ となり，点 M の軌跡は放物線 $y=1+2x^2$ である。ただし，$0<t<1$ から $-1<x<0$ となる。

［解 説］

分数関数の増減についての問題です。内容は基本的ですが，計算量はそれなりにあります。特に，中点 M の y 座標をストレートに求めるのはややハードルが高く，解答例では分子に着目したのですが，分母のかっこの中の式に注目した方が簡単でした。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　B の得点 m について，$m=1,\ 2$ のとき，$m \geqq 3$ のときに場合分けをする。

(i)　$m=1,\ 2$ のとき

1 回目に 1 または 2 のいずれかの札を取り出し，2 回目に番号 m の札を取り出す場合より，その確率は，いずれも $\dfrac{2}{n}\times\dfrac{1}{n}=\dfrac{2}{n^2}$ となる。

(ii)　$m \geqq 3$ のとき

1 回目に 1 または 2 のいずれかの札を取り出し，2 回目に番号 m の札を取り出す場合か，または 1 回目に番号 m の札を取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{2}{n}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2+n}{n^2}$$

(2)　A の得点を l とすると，どんな l に対してもその確率は $\dfrac{1}{n}$ である。

そこで，A の得点より B の得点が大きくなる，すなわち $l<m$ となるのは，

(i)　$m=1,\ 2$ のとき

$m=1$ のときは満たす場合がなく，$m=2$ のときは $l=1$ の場合だけである。

(ii)　$m \geqq 3$ のとき

このとき，A の得点 l は $1\leqq l \leqq m-1$ となり，$m-1$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より，A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n は，

$$p_n=\frac{2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{2+n}{n^2}\sum_{m=3}^{n}\frac{m-1}{n}=\frac{2}{n^3}+\frac{2+n}{n^3}\cdot\frac{2+(n-1)}{2}(n-2)$$

$$=\frac{4+(n^2-4)(n+1)}{2n^3}=\frac{n^2+n-4}{2n^2}$$

［解　説］

確率の標準的な問題です。題意が把握できれば，場合分けが必要であるのは，すぐに理解できるでしょう。

5

問題のページへ

(1)　$f_1(x)=f(x)$，$f_{n+1}(x)=2\cos x+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt$ から，

$$f_{n+1}(x)=2\cos x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$$

$$=2\cos x+\frac{2}{\pi}\sin x\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt-\frac{2}{\pi}\cos x\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt$$

ここで，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt$ ……①，$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$ ……②より，

$$f_{n+1}(x)=2\cos x+b_n\sin x-a_n\cos x=(2-a_n)\cos x+b_n\sin x \cdots\cdots③$$

①③より，$a_{n+1}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\{(2-a_n)\cos t+b_n\sin t\}\sin t\,dt$ となり，

$$a_{n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{2-a_n}{2}\sin 2t+\frac{b_n}{2}(1-\cos 2t)\right\}dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{b_n}{2}\pi=b_n\cdots\cdots④$$

②③より，$b_{n+1}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\{(2-a_n)\cos t+b_n\sin t\}\cos t\,dt$ となり，

$$b_{n+1}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{2-a_n}{2}(1+\cos 2t)+\frac{b_n}{2}\sin 2t\right\}dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2-a_n}{2}\pi=2-a_n\cdots\cdots⑤$$

(2)　$c_n=a_n-1$ とおくと，④⑤より，

$$c_{n+2}=a_{n+2}-1=b_{n+1}-1=(2-a_n)-1=-(a_n-1)=-c_n\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，k を自然数として n を偶奇に分けると，

(i)　n が奇数$(n=2k-1)$のとき

⑥から $c_{2k+1}=-c_{2k-1}$ となり，$c_{2k-1}=c_1(-1)^{k-1}=(a_1-1)(-1)^{k-1}$

$$c_n=(a_1-1)(-1)^{\frac{n+1}{2}-1}=(a_1-1)(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

(ii)　n が偶数$(n=2k)$のとき

⑥から $c_{2k+2}=-c_{2k}$ となり，$c_{2k}=c_2(-1)^{k-1}=(a_2-1)(-1)^{k-1}=(b_1-1)(-1)^{k-1}$

$$c_n=(b_1-1)(-1)^{\frac{n}{2}-1}=(b_1-1)(-1)^{\frac{n-2}{2}}$$

(3)　$a_1=b_1=1$ のとき，(2)から $c_n=0$ となるので $a_n=1$ であり，④⑤から $b_n=1$ となる。すると，a_n，b_n は n によらない定数となる。

このとき，③から，$f_{n+1}(x)=\cos x+\sin x$ なので，$n\geqq 2$ において，

$$f_n(x)=\cos x+\sin x$$

ここで，$f_1(x)=f(x)=\cos x+\sin x$ とし，a_1，b_1 を計算すると，①②より，

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos x+\sin x)\sin t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right\}dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi=1$$

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos x+\sin x)\cos t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)+\frac{1}{2}\sin 2t\right\}dt$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi=1$$

これより，a_n，b_n が n によらない定数となる $f(x)$ の 1 つとして，

$$f(x)=\cos x+\sin x$$

［解 説］

定積分と数列の融合問題です。計算量がかなり多めですが，三角関数の周期に注目すれば，この難点が緩和されます。なお，(3)の $f(x)$ については，常識的なところで予測しています。