

1

解答解説のページへ

p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。また, 点 P から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を Q とする。

- (1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。
- (2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とし、 $a_n = n(n+1)$ とする。さらに、 a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

- (1) d_n は偶数であることを示せ。
- (2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ。
- (3) p を 5 以上の素数とすると、 d_n は p で割り切れないことを示せ。
- (4) $d_n \leq 12$ を示せ。また、 $d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

3

解答解説のページへ

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。 $0, \frac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数 $f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$ を考える。

- (1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。
- (2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α , 極小値を与える x の値を β とし, 座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha))$, $Q(\beta, f(\beta))$ をとる。 t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき, 線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。

- (1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。
- (2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

$f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x), f_2(x), \dots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = 2\cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。
- (2) $c_n = a_n - 1$ とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。
- (3) a_n, b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。

1

問題のページへ

(1) 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ に対し,点 Q は原点 O , A , B で定まる平面 α 上にあるので, 実数 a , b を用いて, $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ と表せ,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}$$

ここで, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OA}$ より, $(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ となり,

$$a(1+4) + b(-2-4) - (-p-2) = 0, \quad 5a - 6b = -p - 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OB}$ より, $(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ となり,

$$a(-2-4) + b(4+4+1) - (2p+2+2) = 0, \quad -6a + 9b = 2p + 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $3a = 3(-p-2) + 2(2p+4)$ となり, $a = \frac{p+2}{3}$

$$b = \frac{1}{9}(2p+4+2p+4) = \frac{4p+8}{9}$$

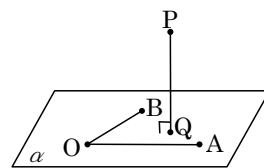
すると, $\overrightarrow{OQ} = \frac{p+2}{3}(-1, 2, 0) + \frac{4p+8}{9}(2, -2, 1) = \frac{p+2}{9}(-3+8, 6-8, 4)$ よって, $Q\left(\frac{5p+10}{9}, \frac{-2p-4}{9}, \frac{4p+8}{9}\right)$ となる。(2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にある条件は, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a+b \leq 1$ なので,

$$\frac{p+2}{3} \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad \frac{4p+8}{9} \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad \frac{p+2}{3} + \frac{4p+8}{9} \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

③から $p \geq -2$ となり, この範囲は④を満たす。⑤から $3(p+2) + 4p+8 \leq 9$ となり, $p \leq -\frac{5}{7}$ である。よって, $p < 0$ と合わせて, 求める p の範囲は $-2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$ である。

[解説]

空間ベクトルの応用に関する基本問題です。計算も複雑ではありません。文系では、(1)が誘導つきの設問になっています。



2

問題のページへ

(1) 連続 2 整数の積 $a_n = n(n+1)$ と $a_{n+3} = (n+3)(n+4)$ は、ともに偶数なので、 a_n と a_{n+3} の最大公約数 d_n は偶数である。

(2) d_n が $8 = 2^3$ で割り切れると仮定すると、 a_n と a_{n+3} はともに 8 で割り切れ、

$$n(n+1) = 8k \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad (n+3)(n+4) = 8l \cdots \cdots \textcircled{2} \quad (k \text{ と } l \text{ は自然数})$$

n と $n+1$ は互いに素なので、 $\textcircled{1}$ から、 n 、 $n+1$ のいずれかが 8 の倍数である。

(i) n が 8 の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で、 $(n+3) - n = 3$ 、 $(n+4) - n = 4$ から、いずれも 8 の倍数ではない。すなわち $\textcircled{2}$ は成立しない。

(ii) $n+1$ が 8 の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で、 $(n+3) - (n+1) = 2$ 、 $(n+4) - (n+1) = 3$ から、いずれも 8 の倍数ではない。すなわち $\textcircled{2}$ は成立しない。

(i)(ii) より、 d_n は 8 で割り切れない。

(3) 5 以上の素数 p に対し、 d_n が p で割り切れると仮定すると、 a_n と a_{n+3} はともに p で割り切れ、

$$n(n+1) = pk' \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad (n+3)(n+4) = pl' \cdots \cdots \textcircled{4} \quad (k' \text{ と } l' \text{ は自然数})$$

n と $n+1$ は互いに素なので、 $\textcircled{3}$ から、 n 、 $n+1$ のいずれかが p の倍数である。

(i) n が p の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で、 $(n+3) - n = 3$ 、 $(n+4) - n = 4$ から、いずれも p の倍数ではない。すなわち $\textcircled{4}$ は成立しない。

(ii) $n+1$ が p の倍数のとき

$n+3$ と $n+4$ は互いに素で、 $(n+3) - (n+1) = 2$ 、 $(n+4) - (n+1) = 3$ から、いずれも p の倍数ではない。すなわち $\textcircled{4}$ は成立しない。

(i)(ii) より、 d_n は p で割り切れない。

(4) まず、(2)、(3) と同様に、 d_n が $9 = 3^2$ で割り切れないことを示す。

そこで、 d_n が 9 で割り切れると仮定すると、 a_n と a_{n+3} はともに 9 で割り切れ、

$$n(n+1) = 9k'' \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad (n+3)(n+4) = 9l'' \cdots \cdots \textcircled{6} \quad (k'' \text{ と } l'' \text{ は自然数})$$

n と $n+1$ は互いに素なので、 $\textcircled{5}$ から、 n 、 $n+1$ のいずれかが 9 の倍数である。

(i) n が 9 の倍数のとき

互いに素な $n+3$ と $n+4$ はいずれも 9 の倍数ではなく、 $\textcircled{6}$ は成立しない。

(ii) $n+1$ が 9 の倍数のとき

互いに素な $n+3$ と $n+4$ はいずれも 9 の倍数ではなく、 $\textcircled{6}$ は成立しない。

(i)(ii) より、 d_n は 9 で割り切れない。

以上より、 d_n は $8 = 2^3$ の倍数でない偶数であり、しかも 5 以上の素数 p および $9 = 3^2$ の倍数でないことから、 d_n を素因数分解すると、

$$d_n = 2^i \cdot 3^j \quad (1 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 1)$$

これより、 $d_n \leq 2^2 \cdot 3^1 = 12$ となる。

また、 $d_n = 12$ の場合は、 a_n と a_{n+3} がともに 12 の倍数になり、その差をとると、

$$a_{n+3} - a_n = (n+3)(n+4) - n(n+1) = 6n+12 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

すると、 $\textcircled{7}$ から $6n+12$ は 12 の倍数になることが必要なので、 n が偶数の場合を小さい方から調べていくと、 $n=8$ で、

$$a_8 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2, \quad a_{11} = 11 \cdot 12 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$$

よって、 $d_n = 12$ となる 1 つの n の値は $n=8$ である。

[解説]

整数を題材にした論証問題です。(1)の役割は(4)への誘導で、証明自体は明らかといってもよいぐらいのものです。また、(2), (3), (4)は、同じスタイルで記述しています。老いの繰り返し言のようですが。なお、(4)の冒頭の「 d_n が 9 で割り切れない」という予測は、 $d_n \leq 12$ という結論より絞り込んだものです。

3

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)} = \frac{x+t}{x-tx^2}$ ($0 < t < 1$) に対して,

$$f'(x) = \frac{x(1-tx) - (x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2} = \frac{tx^2 + 2t^2x - t}{x^2(1-tx)^2} = \frac{t(x^2 + 2tx - 1)}{x^2(1-tx)^2}$$

ここで、 $g(x) = x^2 + 2tx - 1$ とおき、 $g(x) = 0$ の解を $x = \alpha'$ 、 β' とすると、

$$\alpha' = -t - \sqrt{t^2 + 1}, \quad \beta' = -t + \sqrt{t^2 + 1} \quad (\alpha' < \beta')$$

そして、 $g(0) = -1 < 0$ 、 $g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} + 1 > 0$ に注意すると、 $\alpha' < 0 < \beta' < \frac{1}{t}$ から、

$f(x)$ の増減は右表のようになり、 $f(x)$ は $x = \alpha'$ で極大値、 $x = \beta'$ で極小値をとる。

x	...	α'	...	0	...	β'	...	$\frac{1}{t}$...
$f'(x)$	+	0	-	×	-	0	+	×	+
$f(x)$	↗		↘	×	↘		↗	×	↗

(2) 条件より、 $\alpha = \alpha'$ 、 $\beta = \beta'$ となり、 $\alpha + \beta = -2t$ 、 $\alpha\beta = -1$ である。

さて、2点 $P(\alpha, f(\alpha))$ 、 $Q(\beta, f(\beta))$ の中点 $M(x, y)$ に対し、

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-2t}{2} = -t \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha + t}{\alpha(1-t\alpha)} + \frac{\beta + t}{\beta(1-t\beta)} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2} \left\{ \frac{-1}{\alpha(1-t\alpha)} + \frac{1}{\beta(1-t\beta)} \right\} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2} \cdot \frac{-\beta + \alpha + t(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha\beta\{1 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta t^2\}} \\ &= -\frac{\sqrt{t^2 + 1}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{t^2 + 1}(-1 - 2t^2)}{1 + 2t^2 - t^2} = 1 + 2t^2 \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①②より、 $y = 1 + 2(-x)^2 = 1 + 2x^2$ となり、点 M の軌跡は放物線 $y = 1 + 2x^2$ である。ただし、 $0 < t < 1$ から $-1 < x < 0$ となる。

[解説]

分数関数の増減についての問題です。内容は基本的ですが、計算量はそれなりにあります。特に、中点 M の y 座標をストレートに求めるのはややハードルが高く、解答例では分子に着目したのですが、分母のこの中の式に注目した方が簡単でした。

4

問題のページへ

(1) B の得点 m について、 $m=1, 2$ のとき、 $m \geq 3$ のときに場合分けをする。

(i) $m=1, 2$ のとき

1 回目に 1 または 2 のいずれかの札を取り出し、2 回目に番号 m の札を取り出す場合より、その確率は、いずれも $\frac{2}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$ となる。

(ii) $m \geq 3$ のとき

1 回目に 1 または 2 のいずれかの札を取り出し、2 回目に番号 m の札を取り出す場合か、または 1 回目に番号 m の札を取り出す場合より、その確率は、

$$\frac{2}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2+n}{n^2}$$

(2) A の得点を l とすると、どんな l に対してもその確率は $\frac{1}{n}$ である。

そこで、A の得点より B の得点が大きくなる、すなわち $l < m$ となるのは、

(i) $m=1, 2$ のとき

$m=1$ のときは満たす場合がなく、 $m=2$ のときは $l=1$ の場合だけである。

(ii) $m \geq 3$ のとき

このとき、A の得点 l は $1 \leq l \leq m-1$ となり、 $m-1$ 通りの場合がある。

(i)(ii) より、A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n は、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{2+n}{n^2} \sum_{m=3}^n \frac{m-1}{n} = \frac{2}{n^3} + \frac{2+n}{n^3} \cdot \frac{2+(n-1)}{2} (n-2) \\ &= \frac{4+(n^2-4)(n+1)}{2n^3} = \frac{n^2+n-4}{2n^2} \end{aligned}$$

[解説]

確率の標準的な問題です。題意が把握できれば、場合分けが必要であるのは、すぐに理解できるでしょう。

5

問題のページへ

$$(1) f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = 2\cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \text{ から,}$$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 2\cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) (\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt \\ &= 2\cos x + \frac{2}{\pi} \sin x \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt - \frac{2}{\pi} \cos x \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt \cdots \cdots \textcircled{1}, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ より,}$$

$$f_{n+1}(x) = 2\cos x + b_n \sin x - a_n \cos x = (2 - a_n) \cos x + b_n \sin x \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{ より, } a_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{(2 - a_n) \cos t + b_n \sin t\} \sin t dt \text{ と な り,}$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{2 - a_n}{2} \sin 2t + \frac{b_n}{2} (1 - \cos 2t) \right\} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{b_n}{2} \pi = b_n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } b_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{(2 - a_n) \cos t + b_n \sin t\} \cos t dt \text{ と な り,}$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{2 - a_n}{2} (1 + \cos 2t) + \frac{b_n}{2} \sin 2t \right\} dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 - a_n}{2} \pi = 2 - a_n \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$(2) c_n = a_n - 1 \text{ とおくと, } \textcircled{4}\textcircled{5} \text{ より,}$$

$$c_{n+2} = a_{n+2} - 1 = b_{n+1} - 1 = (2 - a_n) - 1 = -(a_n - 1) = -c_n \cdots \cdots \textcircled{6}$$

ここで, k を自然数として n を偶奇に分けると,

(i) n が奇数 ($n = 2k - 1$) のとき

$$\textcircled{6} \text{ から } c_{2k+1} = -c_{2k-1} \text{ と な り, } c_{2k-1} = c_1 (-1)^{k-1} = (a_1 - 1) (-1)^{k-1}$$

$$c_n = (a_1 - 1) (-1)^{\frac{n+1}{2}-1} = (a_1 - 1) (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

(ii) n が偶数 ($n = 2k$) のとき

$$\textcircled{6} \text{ から } c_{2k+2} = -c_{2k} \text{ と な り, } c_{2k} = c_2 (-1)^{k-1} = (a_2 - 1) (-1)^{k-1} = (b_1 - 1) (-1)^{k-1}$$

$$c_n = (b_1 - 1) (-1)^{\frac{n}{2}-1} = (b_1 - 1) (-1)^{\frac{n-2}{2}}$$

(3) $a_1 = b_1 = 1$ のとき, (2) から $c_n = 0$ となるので $a_n = 1$ であり, $\textcircled{4}\textcircled{5}$ から $b_n = 1$ となる。すると, a_n, b_n は n によらない定数となる。

このとき, $\textcircled{3}$ から, $f_{n+1}(x) = \cos x + \sin x$ なので, $n \geq 2$ において,

$$f_n(x) = \cos x + \sin x$$

ここで, $f_1(x) = f(x) = \cos x + \sin x$ とし, a_1, b_1 を計算すると, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\cos x + \sin x) \sin t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \right\} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \pi = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos x + \sin x) \cos t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) + \frac{1}{2} \sin 2t \right\} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \pi = 1 \end{aligned}$$

これより, a_n, b_n が n によらない定数となる $f(x)$ の 1 つとして,

$$f(x) = \cos x + \sin x$$

[解説]

定積分と数列の融合問題です。計算量がかなり多めですが、三角関数の周期に注目すれば、この難点が緩和されます。なお、(3)の $f(x)$ については、常識的なところで予測しています。