1

解答例のページへ

関数 $f(x)=x^3-6x^2-15x+30$ について考える。 $y=f(x)$ のグラフを C とおく。

(1)　$f(x)$ が極大値，極小値をとるような x をそれぞれ求め，$f(x)$ の極大値，極小値を求めよ。

(2)　C 上の点 $(-3,\ -6)$ を通り，C に接する直線の方程式をすべて求めよ。

2

解答例のページへ

整数 a, b, c は条件 $2 \leqq a < b < c \leqq 6$ を満たすとする。

(1)　不等式 $a+b>c$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて挙げよ。

(2)　不等式 $a^2+b^2 \geqq c^2$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて挙げよ。

(3)　(2)で求めた各 $(a,\ b,\ c)$ について，頂点 A, B, C と向かい合う辺の長さがそれぞれ $a,\ b,\ c$ で与えられる $\triangle$ABC を考える。このようなすべての $\triangle$ABC について $\cos\angle$ACB を求めよ。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

数列$\{a_n\}$を次の条件により定める。$a_1=1$，$a_2=3$

$$(n+1)a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+(n+2)a_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$b_n=a_{n+1}-a_n$とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(2)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{225}\frac{1}{a_n}$の値を求めよ。

4

解答例のページへ

関数 $f(x)$ は，すべての実数 x およびすべての整数 n について $f(nx)=\{f(x)\}^n$ を満たし，さらに $f(1)=2$ を満たすとする。ただし，$f(x)$ のとりうる値は 0 でない実数とする。

(1)　$f(n)\leqq 100$ となるような最大の整数 n を求めよ。

(2)　すべての実数 x について $f(x)>0$ であることを証明せよ。

(3)　$f(0.25)$ を求めよ。

(4)　a が有理数のとき，$f(a)$ を a で表せ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-15x+30$ に対して,

$$f'(x)=3x^2-12x-15$$
$$=3(x+1)(x-5)$$

これより，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x=-1$ で極大値 38，$x=5$ で極小値 -70 をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	38	$\searrow$	-70	$\nearrow$

(2)　$C: y=f(x)$ 上の接点を $(t,\ f(t))$ とおくと，接線の方程式は,

$$y-f(t)=f'(t)(x-t),\quad y=f'(t)x-tf'(t)+f(t)$$

すると，$y=3(t+1)(t-5)x-t(3t^2-12t-15)+(t^3-6t^2-15t+30)$ から,

$$y=3(t+1)(t-5)x-2t^3+6t^2+30\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$が点 $(-3,\ -6)$ を通ることより，$-6=-9(t+1)(t-5)-2t^3+6t^2+30$ となり,

$$2t^3+3t^2-36t-81=0,\quad (t+3)^2(2t-9)=0$$

すると，$t=-3,\ \dfrac{9}{2}$ となり，接線の方程式は，$(*)$から,

$$y=48x+138,\quad y=-\frac{33}{4}x-\frac{123}{4}$$

［コメント］

接線についての基本題です。ただ，数値計算がやや面倒です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

整数 a, b, c が $2 \leqq a < b < c \leqq 6$ を満たすとき，$c = 4,\ 5,\ 6$ から，

(i)　$c = 4$ のとき　$(a,\ b) = (2,\ 3)$

(ii)　$c = 5$ のとき　$(a,\ b) = (2,\ 3)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 4)$

(iii)　$c = 6$ のとき　$(a,\ b) = (2,\ 3)$　$(2,\ 4)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(4,\ 5)$

(1)　$a + b > c$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ は，

・$c = 4$ のとき　$a + b > 4$ から，$(a,\ b) = (2,\ 3)$

・$c = 5$ のとき　$a + b > 5$ から，$(a,\ b) = (2,\ 4)$，$(3,\ 4)$

・$c = 6$ のとき　$a + b > 6$ から，$(a,\ b) = (2,\ 5)$，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(4,\ 5)$

これより，$(a,\ b,\ c) = (2,\ 3,\ 4)$，$(2,\ 4,\ 5)$，$(3,\ 4,\ 5)$，$(2,\ 5,\ 6)$，$(3,\ 4,\ 6)$，$(3,\ 5,\ 6)$，$(4,\ 5,\ 6)$ である。

(2)　$a^2 + b^2 \geqq c^2$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ は，

・$c = 4$ のとき　$a^2 + b^2 \geqq 16$ から，$(a,\ b)$ は存在しない。

・$c = 5$ のとき　$a^2 + b^2 \geqq 25$ から，$(a,\ b) = (3,\ 4)$

・$c = 6$ のとき　$a^2 + b^2 \geqq 36$ から，$(a,\ b) = (4,\ 5)$

これより，$(a,\ b,\ c) = (3,\ 4,\ 5)$，$(4,\ 5,\ 6)$ である。

(3)　余弦定理より，$\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ なので，

・$(a,\ b,\ c) = (3,\ 4,\ 5)$ のとき　$\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{9 + 16 - 25}{2\cdot 3\cdot 4} = 0$

・$(a,\ b,\ c) = (4,\ 5,\ 6)$ のとき　$\cos\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{16 + 25 - 36}{2\cdot 4\cdot 5} = \dfrac{1}{8}$

［コメント］

場合の数の基本題です。10 通りの $(a,\ b,\ c)$ について，チェックするだけです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$(n+1)a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+(n+2)a_n=0$ に対して，

$$(n+1)a_{n+2}-\{(n+1)+(n+2)\}a_{n+1}+(n+2)a_n=0$$

これより，$(n+1)(a_{n+2}-a_{n+1})=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$ となり，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}(a_{n+1}-a_n)$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}b_n$ である。

(2)　(1)から，$\dfrac{b_{n+1}}{n+2}=\dfrac{b_n}{n+1}$ となり，$\dfrac{b_n}{n+1}=\dfrac{b_1}{1+1}=\dfrac{b_1}{2}$

ここで，$a_1=1$，$a_2=3$ から，$b_1=a_2-a_1=3-1=2$ であるので，$\dfrac{b_n}{n+1}=\dfrac{2}{2}=1$

したがって，$b_n=n+1$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=1+\frac{2+n}{2}\cdot(n-1)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$n=1$ をあてはめると $a_1=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$ となり，$n=1$ のときも成り立っている。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{225}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{225}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{225}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)=2\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{225+1}\Big)=2\cdot\frac{225}{226}=\frac{225}{113}$

［コメント］

誘導の非常に丁寧な漸化式の基本題です。

4

問題のページへ

(1)　すべての実数xとすべての整数nについて，$f(nx)=\{f(x)\}^n$ ………①

ここで，$f(1)=2$から，①に$x=1$を代入すると，

$$f(n)=\{f(1)\}^n=2^n$$

これより，$f(n)\leqq 100$は$2^n\leqq 100$ ……②となり，$2^6=64$，$2^7=128$から，②を満たす最大の整数nは，$n=6$である。

(2)　①において，nを2，xを$\dfrac{x}{2}$に置き換えると，$f(x)=f\left(2\cdot\dfrac{x}{2}\right)=\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2\geqq 0$

そして，どんな x に対しても$f(x)\neq 0$から，すべての実数 x で$f(x)>0$である。

(3)　①において，$n=4$，$x=0.25$とおくと，$f(4\cdot 0.25)=\{f(0.25)\}^4$となり

$$\{f(0.25)\}^4=f(1)=2$$

すると，$f(0.25)>0$から，$f(0.25)=2^{\frac{1}{4}}$である。

(4)　互いに素な整数$p, q\ (p>0)$を用いて，有理数aを$a=\dfrac{q}{p}$とおく。

①において，$n=q$，$x=\dfrac{1}{p}$とおくと，

$$f(a)=f\left(\frac{q}{p}\right)=f\left(q\cdot\frac{1}{p}\right)=\left\{f\left(\frac{1}{p}\right)\right\}^q \text{………③}$$

また，①において$n=p$，$x=\dfrac{1}{p}$とおくと，$f(1)=f\left(p\cdot\dfrac{1}{p}\right)=\left\{f\left(\dfrac{1}{p}\right)\right\}^p$より

$2=\left\{f\left(\dfrac{1}{p}\right)\right\}^p$となり，$f\left(\dfrac{1}{p}\right)>0$から$f\left(\dfrac{1}{p}\right)=2^{\frac{1}{p}}$ ……④である。

④を③に代入すると，$f(a)=\left(2^{\frac{1}{p}}\right)^q=2^{\frac{q}{p}}=2^a$である。

［コメント］

抽象関数を題材にした問題で，経験がなければ取り組みにくいでしょう。なお，(4)は(3)の$0.25=\dfrac{1}{4}$を誘導と考え，同様な方法で記述しました。