1

解答例のページへ

α，r を $\alpha>1$，$r>1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\alpha$ で公比が r の等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log_{a_n}(a_{n+1})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。

(1)　b_n を n と $\log_\alpha r$ を用いて表せ。

(2)　等式 $b_n=\dfrac{n+2}{n+1}$ がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ。

(3)　(2)の条件が成り立つとき，積 a_1a_2，$a_1a_2a_3$，$a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁になるような α の範囲を求めよ。

2

解答例のページへ

円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ を考える。実数 p，q が $p^2 + q^2 > 1$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 l_1，l_2 の接点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q_2}(x_2,\ y_2)$ とする。また，座標平面上の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。

(1)　直線 l_1，l_2，線分 $\mathrm{OQ_1}$，$\mathrm{OQ_2}$ で囲まれた四角形の面積 S を p, q を用いて表せ。

(2)　点 P が楕円 $C_2 : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ の上を動くとき，(1)の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

実数 a および自然数 n に対して，定積分 $I(a,\ n)=\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx$ を考える。ここで e は自然対数の底である。

(1)　$I(a,\ n)$ を求めよ。

(2)　$a_n=\dfrac{\log n}{2\pi}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n)$ を求めよ。ただし，$\log n$ は n の自然対数である。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ であることを用いてもよい。

$\boxed{4}$

解答例のページへ

a を正の実数とする。

(1)　a が 1 でないとき，複素数 z についての方程式 $a|z-1|=|(a-2)z+a|$ を考える。この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(2)　方程式 $|z|^2=6-a$，$a|z-1|=|(a-2)z+a|$ をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$

解答例のページへ

n を 3 以上の整数とする。

(1)　k を整数とする。$k < a < b < c \leqq k+n$ を満たす整数 $a,\ b,\ c$ の選び方の総数を n の式で表せ。

(2)　$1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ を満たす整数 a, b, c のうち，$a+b > c$ となる a, b, c の選び方の総数を L とする。このとき，$L > {}_n\mathrm{C}_3$ であることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$は，$a_1=\alpha>1$で公比$r>1$の等比数列より，$a_n=\alpha r^{n-1}$と表され，

$$b_n=\log_{a_n}(a_{n+1})=\frac{\log_\alpha(a_{n+1})}{\log_\alpha(a_n)}=\frac{\log_\alpha(\alpha r^n)}{\log_\alpha(\alpha r^{n-1})}=\frac{\log_\alpha\alpha+\log_\alpha r^n}{\log_\alpha\alpha+\log_\alpha r^{n-1}}$$

$$=\frac{1+n\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r}$$

(2)　すべての自然数nについて$b_n=\dfrac{n+2}{n+1}$から，$\dfrac{1+n\log_\alpha r}{1+(n-1)\log_\alpha r}=\dfrac{n+2}{n+1}$となり，

$$(n+1)(1+n\log_\alpha r)=(n+2)\{1+(n-1)\log_\alpha r\}$$

$$n+1+(n^2+n)\log_\alpha r=n+2+(n^2+n-2)\log_\alpha r$$

まとめると，$2\log_\alpha r=1$から$\alpha=r^2$である。

(3)　(2)から$r=\alpha^{\frac{1}{2}}$となり$a_n=\alpha\cdot\alpha^{\frac{n-1}{2}}=\alpha^{\frac{n+1}{2}}$から，$a_2=\alpha^{\frac{3}{2}}$，$a_3=\alpha^2$，$a_4=\alpha^{\frac{5}{2}}$

$$a_1a_2=\alpha^{1+\frac{3}{2}}=\alpha^{\frac{5}{2}},\ a_1a_2a_3=\alpha^{\frac{5}{2}+2}=\alpha^{\frac{9}{2}},\ a_1a_2a_3a_4=\alpha^{\frac{9}{2}+\frac{5}{2}}=\alpha^7$$

そして，a_1a_2，$a_1a_2a_3$，$a_1a_2a_3a_4$の整数部分がそれぞれ2桁，3桁，4桁から，

$$10\leqq\alpha^{\frac{5}{2}}<10^2,\ 10^2\leqq\alpha^{\frac{9}{2}}<10^3,\ 10^3\leqq\alpha^7<10^4$$

すると，$10^{\frac{2}{5}}\leqq\alpha<10^{\frac{4}{5}}$かつ$10^{\frac{4}{9}}\leqq\alpha<10^{\frac{2}{3}}$かつ$10^{\frac{3}{7}}\leqq\alpha<10^{\frac{4}{7}}$となる。

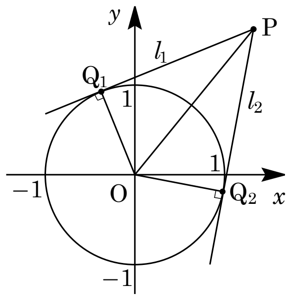
ここで，$\dfrac{2}{5}<\dfrac{3}{7}<\dfrac{4}{9}<\dfrac{4}{7}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{4}{5}$から，求める$\alpha$の範囲は$10^{\frac{4}{9}}\leqq\alpha<10^{\frac{4}{7}}$である。

［コメント］

等比数列の基本題です。(3)では数直線を用いて，ミスを防ぐことが肝要です。上の記述は省きましたが。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$C_1: x^2+y^2=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線を l_1，l_2，その接点を Q_1，Q_2 とおくと，

$$\mathrm{PQ}_1=\mathrm{PQ}_2=\sqrt{\mathrm{OP}^2-1^2}=\sqrt{p^2+q^2-1}$$

これより，直線 l_1，l_2，線分 OQ_1，OQ_2 で囲まれた四角形の面積 S は，$\triangle\mathrm{OPQ}_1\equiv\triangle\mathrm{OPQ}_2$ から，

$$S=2\Big(\frac{1}{2}\mathrm{PQ}_1\cdot\mathrm{OQ}_1\Big)=\sqrt{p^2+q^2-1}$$

(2)　楕円 $C_2: \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点を，θ を任意として $(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta)$ とおくと，

$$x^2+y^2=(\sqrt{2}\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\sin\theta)^2=2\cos^2\theta+3\sin^2\theta=\sin^2\theta+2>1$$

すると，C_2 は C_1 の外部にあり，$\mathrm{P}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{3}\sin\theta)$ とおくと，(1)から，

$$S=\sqrt{(\sqrt{2}\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\sin\theta)^2-1}=\sqrt{\sin^2\theta+1}$$

これより，S は，$\sin^2\theta=1$ すなわち $(p,\ q)=(0,\ \pm\sqrt{3})$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとり，$\sin^2\theta=0$ すなわち $(p,\ q)=(\pm\sqrt{2},\ 0)$ のとき最小値 1 をとる。

［コメント］

円と接線についての基本題です。それに楕円が少々絡んでいます。

3

問題のページへ

(1) まず，$\left(e^{ax}\sin(nx)\right)' = ae^{ax}\sin(nx) + ne^{ax}\cos(nx)$ ………①

$\left(e^{ax}\cos(nx)\right)' = ae^{ax}\cos(nx) - ne^{ax}\sin(nx)$ ………②

①×a－②×n から，$\left(ae^{ax}\sin(nx) - ne^{ax}\cos(nx)\right)' = (a^2+n^2)e^{ax}\sin(nx)$

$$e^{ax}\sin(nx) = \frac{1}{a^2+n^2}\left(e^{ax}\{a\sin(nx) - n\cos(nx)\}\right)'$$

$I(a,\ n) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx = \frac{1}{a^2+n^2}\Big[e^{ax}\{a\sin(nx) - n\cos(nx)\}\Big]_0^{2\pi}$ となり，

$$I(a,\ n) = \frac{1}{a^2+n^2}\left[e^{2\pi a}\{a\sin(2n\pi) - n\cos(2n\pi)\} - e^0\{a\sin 0 - n\cos 0\}\right]$$

$$= \frac{1}{a^2+n^2}\left\{e^{2\pi a}(-n) - 1\cdot(-n)\right\} = \frac{n}{a^2+n^2}(1-e^{2\pi a})$$

(2) $a_n = \dfrac{\log n}{2\pi}$ のとき，(1)から，

$$I(a_n,\ n) = \frac{n}{{a_n}^2+n^2}(1-e^{2\pi a_n}) = \frac{n}{\dfrac{(\log n)^2}{4\pi^2}+n^2}(1-e^{\log n}) = \frac{n(1-n)}{\dfrac{(\log n)^2}{4\pi^2}+n^2}$$

$$= \frac{4\pi^2(n-n^2)}{(\log n)^2+4\pi^2 n^2} = 4\pi^2\cdot\frac{\dfrac{1}{n}-1}{\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^2+4\pi^2}$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n) = 4\pi^2\cdot\frac{-1}{4\pi^2} = -1$ である。

［コメント］

定積分の計算と極限の融合問題です。(1)は，普通に部分積分を行ってもよいのですが，特に符号のミスを防ぐため，上記のような計算をしました。

4

問題のページへ

(1)　$a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき，$a|z-1|=|(a-2)z+a|$ に対して，

$$a^2|z-1|^2=|(a-2)z+a|^2$$

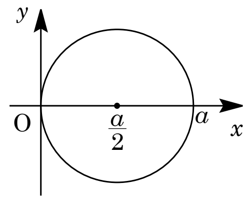
共役複素数を用いて，$a^2(z-1)(\overline{z}-1)=\{(a-2)z+a\}\{(a-2)\overline{z}+a\}$ から，

$$a^2(z\overline{z}-z-\overline{z}+1)=(a-2)^2z\overline{z}+a(a-2)z+a(a-2)\overline{z}+a^2$$

まとめると，$4(a-1)z\overline{z}-2a(a-1)z-2a(a-1)\overline{z}=0$ となり，$a\neq 1$ から，

$$z\overline{z}-\frac{1}{2}az-\frac{1}{2}a\overline{z}=0,\ \left(z-\frac{a}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$$

すると，$\left|z-\frac{a}{2}\right|^2=\frac{a^2}{4}$ から $\left|z-\frac{a}{2}\right|=\frac{a}{2}$ となり，z 全体の集合は，中心が点 $\frac{a}{2}$ で半径が $\frac{a}{2}$ の円である。



図示すると，右図のようになる。

(2)　まず，$a>0$ のとき，$|z|^2=6-a$ ……①を満たす複素数 z は，

・$6-a=0\ (a=6)$ のとき　$z=0$

・$6-a>0\ (0<a<6)$ のとき　z は中心が原点で半径が $\sqrt{6-a}$ の円上の点である。

また，$a>0$ のとき，$a|z-1|=|(a-2)z+a|$ ……②を満たす複素数 z は，

・$a\neq 1$ のとき　(1)から，z は中心が点 $\frac{a}{2}$ で半径が $\frac{a}{2}$ の円上の点である。

・$a=1$ のとき　$|z-1|=|-z+1|$ から，z は任意の点である。

すると，①と②をともに満たす複素数 z が存在するのは，

(i)　$a=6$ のとき　$z=0$ は①と②をともに満たす。

(ii)　$a=1$ のとき　中心が原点で半径が $\sqrt{6-a}$ の円上の点は①と②をともに満たす。

(iii)　$0<a<1$，$1<a<6$ のとき

円①と円②が共有点をもつ条件は，2 つの円の中心間距離が $\frac{a}{2}$ より，

$$\left|\sqrt{6-a}-\frac{a}{2}\right|\leqq\frac{a}{2}\leqq\sqrt{6-a}+\frac{a}{2}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③の右側の不等式はつねに成り立ち，左側の不等式については，

$$\left(\sqrt{6-a}-\frac{a}{2}\right)^2\leqq\frac{a^2}{4},\ 6-a-a\sqrt{6-a}\leqq 0,\ 6-a\leqq a\sqrt{6-a}$$

すると，$\sqrt{6-a}\leqq a$ となり，$6-a\leqq a^2$ から $a^2+a-6\geqq 0$，$(a+3)(a-2)\geqq 0$

$a+3>0$ から $a\geqq 2$ であり，$1<a<6$ と合わせて $2\leqq a<6$ となる。

(i)～(iii)より，求める a の範囲は，$a=1$，$2\leqq a\leqq 6$ である。

［コメント］

複素数平面上の円を題材にした問題です。(2)では慎重さが求められます。

5

問題のページへ

(1)　n を 3 以上の整数, k を整数とする。

このとき，$k<a<b<c\leqq k+n$ すなわち $k+1\leqq a<b<c\leqq k+n$ を満たす整数 a, b, c の選び方は，$k+1$ 以上で $k+n$ 以下の n 個の整数から 3 個を選び，小さい方から a, b, c と対応させると考えると，その総数は,

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ \text{（通り）}$$

(2)　(1)において $k=n$ の場合を考えると，$n+1\leqq a<b<c\leqq 2n$ ……①を満たす整数 a, b, c の選び方は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りである。

ここで，①を満たす $a=n+1$，$b=n+2$，$c=2n$ のとき,

$$a+b=2n+3>2n=c$$

これから，①を満たす整数 a, b, c は，すべて $a+b>c$ が成り立つ。

さて，「$1\leqq a<b<c\leqq 2n$ かつ $a+b>c$」……②となる a, b, c の選び方は，①を満たす整数 a, b, c の選び方のほかに，$n\geqq 3$ から，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 4)$ がある。

すると，②を満たす整数 a, b, c の選び方の総数を L とすると,

$$L\geqq {}_n\mathrm{C}_3+1>{}_n\mathrm{C}_3$$

［コメント］

場合の数の問題です。①式で(1)から(2)へ繋がっていますが，「①を満たす a, b, c はすべて $a+b>c$ である」という発見ができるかどうか……。