1

解答解説のページへ

正の数 a に対し，関数 $y = x^2 - ax \ \left(\dfrac{a}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5a}{6}\right)$ のグラフを C とする。長方形 T で，一辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　長方形 T の周の長さの最大値を, a を用いて表せ。ただし，長方形の周の長さとは, 4 辺の長さの和のことをいう。

(2)　長方形 T の面積の最大値を, a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$$x-y<0,\quad x+y<2,\quad ax+(2a+3)y<1$$

3

解答解説のページへ

$\dfrac{1}{x}$の小数部分が$\dfrac{x}{2}$に等しくなるような正の数 x をすべて求めよ。ただし，正の数 a の小数部分とは，a をこえない最大の整数 n との差 $a-n$ のことをいう。たとえば，3 の小数部分は 0 であり，3.14 の小数部分は 0.14 である。

4

解答解説のページへ

複素数平面において，複素数1，$1+2i$，$2i$，z，w を表す点を，それぞれ, A, B, C, P, Q とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P が線分 AB 上を A から B まで動くとき，複素数 z^2 を表す点は，複素数平面上で，どのような図形を描くか。式で表し，図示せよ。

(2)　△AQC が点 Q を直角の頂点とする直角二等辺三角形になるとき，複素数 w を求めよ。

5

解答解説のページへ

正の数 a に対し，空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$ を考える。$\angle\mathrm{OPQ}=60^\circ$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) A から 3 点 O, P, Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

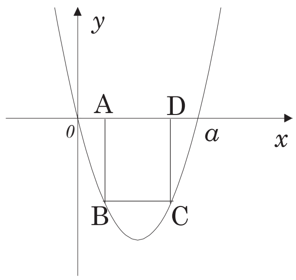
1

問題のページへ

(1)　放物線 C の軸が $x=\frac{a}{2}$ から，$0<t\leqq\frac{a}{3}$ として，

長方形の左側の辺を $x=\frac{a}{2}-t$，右側の辺を $x=\frac{a}{2}+t$

と表すと，



$$\mathrm{AD}=2t$$

$$\mathrm{AB}=-\left\{\left(\frac{a}{2}-t\right)^2-a\left(\frac{a}{2}-t\right)\right\}=-t^2+\frac{a^2}{4}$$

周の長さ l は，

$$l=2\cdot 2t+2\left(-t^2+\frac{a^2}{4}\right)=-2t^2+4t+\frac{a^2}{2}=-2(t-1)^2+2+\frac{a^2}{2}$$

(i)　$1\leqq\frac{a}{3}$　$(a\geqq 3)$ のとき

$t=1$ のとき l は最大で，最大値は $2+\frac{a^2}{2}$

(ii)　$\frac{a}{3}<1$　$(0<a<3)$ のとき

$t=\frac{a}{3}$ のとき l は最大で，最大値は $\frac{5}{18}a^2+\frac{4}{3}a$

(2)　長方形の面積を S とすると，

$$S=2t\left(-t^2+\frac{a^2}{4}\right)=-2t^3+\frac{a^2}{2}t$$

$$S'=-6t^2+\frac{a^2}{2}=-6\left(t-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{6}a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

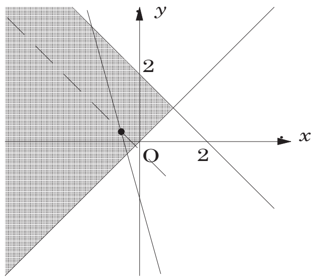
$t=\frac{\sqrt{3}}{6}a$ のとき S は最大で，最大値は $\frac{\sqrt{3}}{18}a^3$

［解 説］

放物線の軸に関する対称性を利用して変数を設定するところが，本問の唯一のポイントです。これによって(2)の計算量はぐっと減ります。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

$$\begin{cases} x-y<0 \cdots\cdots\cdots ① \\ x+y<2 \cdots\cdots\cdots ② \\ ax+(2a+3)y<1 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$



①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③の表す領域の境界線は $ax+(2a+3)y=1$ ……④

a について整理して，$a(x+2y)+(3y-1)=0$

よって④は，$x+2y=0$ かつ $3y-1=0$，すなわち $(x,\ y)=\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ をつねに通過する。

また，③に $(x,\ y)=(0,\ 0)$ を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，定点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通過する直線を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線 $x-y=0$ と④との交点は，

$$(3a+3)x=1,\ \ x=\frac{1}{3(a+1)}\ \ (a\neq -1)$$

また，点 $\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通り，直線 $x+y=2$ と平行な直線 $y=-\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}=-x-\dfrac{1}{3}$ と直線 $x-y=0$ との交点は，

$$-x-\frac{1}{3}=x,\ \ x=-\frac{1}{6}$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{3(a+1)}<-\frac{1}{6}$$

$a+1<0\ \ (a<-1)$ で，$2>-(a+1)$，$a>-3$

よって，$-3<a<-1$

［解 説］

③の領域については，境界線④が定点を通過することを利用し，原点を含むか否かで決定しました。また，④の傾きを求めて図から処理してもよいのですが，不等式の計算がたいへんです。そのため，直線 $y=x$ との交点の範囲をもとにして解を書きました。なお，今年の東京工大の第 1 問も同じ考え方をして解いています。

3

問題のページへ

n を 0 以上の整数として，$n \leqq \dfrac{1}{x} < n+1$ ……①とすると，小数部分は $\dfrac{1}{x}-n$ 。

条件より，$\dfrac{1}{x}-n=\dfrac{x}{2}$，$x^2+2nx-2=0$

$x>0$ より，$x=-n+\sqrt{n^2+2}$

すると，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-n+\sqrt{n^2+2}}=\dfrac{n+\sqrt{n^2+2}}{2}$

①に代入して，$n \leqq \dfrac{n+\sqrt{n^2+2}}{2} < n+1$，$2n \leqq n+\sqrt{n^2+2} < 2(n+1)$

$n \leqq \sqrt{n^2+2} < n+2$ ………②

②の左側の不等式はつねに成立する。

②の右側の不等式は，$n^2+2 < n^2+4n+4$ となり，つねに成立する。

以上より，求める x は，$x=-n+\sqrt{n^2+2}$ （n は 0 以上の整数）

［解 説］

与えられた条件から，整数の n についての連立不等式を立てて解いてみました。この不等式によって，n の値の範囲が限定されるかとも思ったのですが，実は解は無数に存在しました。

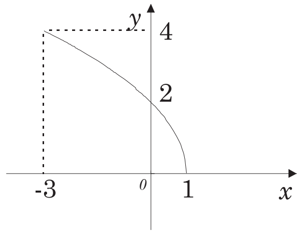
$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　$z=1+ti\ (0\leqq t\leqq 2)$，$z^2=x+yi$ とおくと，

$$x+yi=(1+ti)^2=(1-t^2)+2ti$$

$$x=1-t^2,\quad y=2t$$



よって，$x=1-\dfrac{y^2}{4}$ から，$y^2=-4(x-1)$

$0\leqq t\leqq 2$ から，$0\leqq y\leqq 4$

点 z^2 の軌跡は，放物線 $y^2=-4(x-1)$ （$0\leqq y\leqq 4$）

(2)　△AQC が $\angle\mathrm{Q}=90^\circ$ の直角二等辺三角形なので，点 $\mathrm{C}(2i)$ は点 Q を中心として点 $\mathrm{A}(1)$ を $\pm 90^\circ$ 回転した点である。

$$2i-w=\pm i(1-w)$$

$2i-w=i(1-w)$ のときは，$(1-i)w=i$ より $w=\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{-1+i}{2}$

$2i-w=-i(1-w)$ のときは，$(1+i)w=3i$ より $w=\dfrac{3i}{1+i}=\dfrac{3+3i}{2}$

［解　説］

$\boxed{5}$ との選択問題です。難易は両問とも同程度ですが，計算量については本問の方が少なめです。

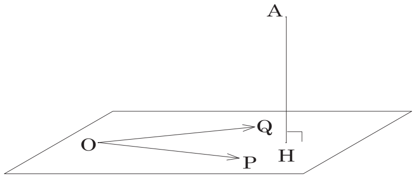
$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{OP}=(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{OQ}=(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos 60^\circ$ より，

$$4a^2=2\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2a^2+5a^2+1}\cdot\frac{1}{2}$$



$a>0$ より，$4a=\sqrt{2}\cdot\sqrt{7a^2+1}$

まとめて，$2a^2-2=0$，$a=1$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{OP}=(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，

$\overrightarrow{OQ}=(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)$

H は平面 OPQ 上の点より，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}$（$s, t$ は定数）……①とおくと，

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}$$

直線 AH は平面 OPQ と直交するので，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ ……②かつ $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ ……③

②より，$s|\overrightarrow{OP}|^2+t\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$8s+4t=0$，$2s+t=0$ ………④

③より，$s\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+t|\overrightarrow{OQ}|^2-\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$4s+8t-1=0$ ………⑤

④⑤より，$s=-\dfrac{1}{12}$，$t=\dfrac{1}{6}$

よって，①より $\overrightarrow{OH}=-\dfrac{1}{12}(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)+\dfrac{1}{6}(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

すなわち，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$ となる。

［解 説］

$\boxed{4}$ との選択問題です。(2)は平面の媒介変数表示を用いて解きましたが，平面の方程式を利用すると少し計算が少なくてすみます。