$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

中心がそれぞれ$(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$である半径 1 の円A, Bを考える。円Cが, Aを内側に含み, Bの外側にあり, しかも, A, Bの両方に接しながら動くとき, 次の問いに答えよ。

(1) 円Cの中心の軌跡を求めよ。

(2) 円Cが直線$y=2$に接するとき, Cの半径を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $y=\sqrt{1-(\log x)^2}$ $\left(\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq e\right)$のグラフを C とする。次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とし，e はその底とする。

(1)　C 上の点 A における C の接線が原点 O$(0,\ 0)$ を通るものとする。このとき，点 A の x 座標を求めよ。

(2)　C と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

ある駅の待合室に，n 個のいすが横一列に並んでいる。k 人が，どの二人も隣り合わないように，いすにすわる場合の数を，$f(n,\ k)$ とする。$n \geqq 2k-1$ のとき，次を証明せよ。

$$f(n,\ k)={}_{n-k+1}\mathrm{C}_k \times (k!)$$

4

解答解説のページへ

次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点$(a,\ b)$の集合を式で表し，図示せよ。

$$x-y<0,\quad x+y<2,\quad ax+by<1$$

5

解答解説のページへ

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 z（$z \neq 0$）を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ。

$\boxed{6}$

解答解説のページへ

無作為に 13 人を選ぶとき，日曜日生まれの人の数を X，土曜日生まれの人の数を Y とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，どの曜日に生まれる確率も $\dfrac{1}{7}$ とする。

(1)　$X=k,\ Y=m$ となる確率 $P(X=k,\ Y=m)$ を k, m の式として表せ。ただし，$0 \leqq k,\ 0 \leqq m,\ k+m \leqq 13$ とする。

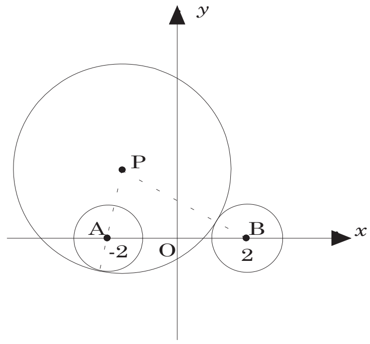
(2)　$P(X=k,\ Y=2)$ が最大となる k を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　$A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$とおき，円Cの中心をPとすると，

$$PA+1=PB-1,\ \ PB-PA=2$$

よって，Pは2点A, Bを焦点とする双曲線の$x<0$の枝である。



その方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(c^2=a^2+b^2)$

とおくと，

$2a=2$かつ$c=2$より，$a=1$，$b=\sqrt{3}$

すなわち，Pの軌跡は双曲線$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$　$(x<0)$………①

(2)　求める円Cの半径をrとし，①上の点を$(s,\ t)$とおくと，

$$s^2-\frac{t^2}{3}=1\ \ (s<0)\cdots\cdots\cdots②$$

また，$t<2$から条件より，

$$2-t=\sqrt{(s+2)^2+t^2}+1,\ \ 1-t=\sqrt{(s+2)^2+t^2}$$

$t\leqq1$で，$(1-t)^2=(s+2)^2+t^2$，$t=-\dfrac{1}{2}(s^2+4s+3)$………③

③を②に代入して，

$$3s^2-\frac{1}{4}(s^2+4s+3)^2=3,\ \ 12(s+1)(s-1)-(s+1)^2(s+3)^2=0$$

$$(s+1)\left\{12(s-1)-(s+1)(s+3)^2\right\}=0,\ \ (s+1)(s^3+7s^2+3s+21)=0$$

$$(s+1)\left\{s^2(s+7)+3(s+7)\right\}=0,\ \ (s+1)(s+7)(s^2+3)=0$$

$s<0$より，$s=-1$，$s=-7$

③より，$t=0$，$t=-12$

このときCの半径は，2または14となる。

［解 説］

(1)は双曲線の定義を用いると，直接的に計算するより簡単です。(2)も同様に放物線の定義を用いてもよいのですが，計算量はあまり変わりません。なお，sについての方程式を解くときに，途中の計算を闇雲に行うとたいへんなことになります。

2

問題のページへ

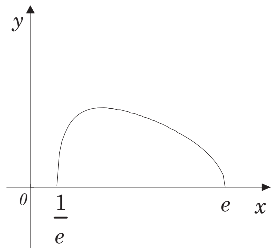
(1)　$y=\sqrt{1-(\log x)^2}$，　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-(\log x)^2}}\cdot(-2\log x)\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\log x}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}$

$x=t$ における接線は，

$$y=-\frac{\log t}{t\sqrt{1-(\log t)^2}}(x-t)+\sqrt{1-(\log t)^2}$$

原点$(0,\ 0)$を通ることより，

$$0=-\frac{\log t}{t\sqrt{1-(\log t)^2}}(-t)+\sqrt{1-(\log t)^2}$$



まとめて，$(\log t)^2-\log t-1=0$，$\log t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ここで，$\dfrac{1}{e}\leqq t\leqq e$ から $-1\leqq\log t\leqq 1$ なので，$\log t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

よって，$t=e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

(2)　求める体積を V とすると，$V=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\pi\left\{1-(\log x)^2\right\}dx$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\log x)^2dx=\Big[x(\log x)^2\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=e-\frac{1}{e}-2\left\{\Big[x\log x\Big]_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}dx\right\}$$

$$=e-\frac{1}{e}-2\left(e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}\right)$$

$$=e-\frac{5}{e}$$

よって，$V=\pi\left(e-\dfrac{1}{e}-e+\dfrac{5}{e}\right)=\dfrac{4}{e}\pi$

［解　説］

基本題です。計算ミスだけが完答を阻む原因となる問題です。

3

問題のページへ

$n-k$ 個の空席のいすが横一列に並べてあるとすると，そのいすの間または両端は $n-k+1$ 箇所ある。

条件より，$n \geqq 2k-1$ なので $n-k+1 \geqq k$ となり，この $n-k+1$ 箇所の中から k 箇所選び（${}_{n-k+1}\mathrm{C}_k$ 通り）その場所にいすにすわった k 人が割り込む（$k!$ 通り）と考えると，題意に適するすわり方となる。

よって，$f(n,\ k) = {}_{n-k+1}\mathrm{C}_k \times (k!)$

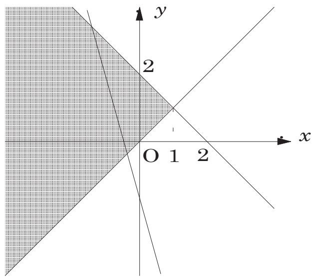
［解 説］

結論が与えられているので，その根拠の説明だけです。上で述べた考え方は，隣り合わないという条件のついた並べ方の数を求めるときの常套手段です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

$$\begin{cases} x-y<0 \cdots\cdots\cdots ① \\ x+y<2 \cdots\cdots\cdots ② \\ ax+by<1 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$



①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③に $(x,\ y)=(0,\ 0)$ を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，直線 $ax+by=1 \cdots\cdots ④$ を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線 $x-y=0$ と④との交点は，

$$(a+b)x=1,\ \ x=\frac{1}{a+b}\quad (a\neq -b)$$

また，直線 $x+y=2$ と④との交点は，

$$ax+b(2-x)=1,\ \ x=\frac{1-2b}{a-b}\quad (a\neq b)$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{a+b}<0 \cdots\cdots ⑤ \text{かつ} \frac{1-2b}{a-b}<1 \cdots\cdots ⑥$$

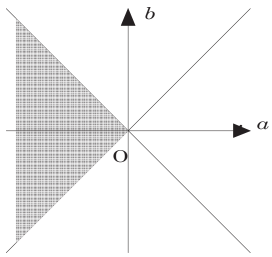
⑤より，$a+b<0,\ b<-a \cdots\cdots\cdots ⑦$

⑥より，$(1-2b)(a-b)<(a-b)^2$，

$$(a-b)(a-b-1+2b)>0,\ (a-b)(a+b-1)>0$$

⑦から $a+b-1<0$ なので，$a-b<0$，$b>a \cdots\cdots\cdots ⑦$

⑥⑦より，$a<b<-a$



点 $(a,\ b)$ の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解 説］

③の領域については，直線④を境界とし，原点を含むか否かで決定しました。また，直線④と直線 $y=x$ および $y=-x+2$ との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。なお，本問は文系の第 2 問を一般化したものです。

5

問題のページへ

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が実数なので，$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{2}+\dfrac{1}{\overline{z}}$

$$\frac{z-\overline{z}}{2}+\frac{\overline{z}-z}{z\overline{z}}=0,\ \ z\overline{z}(z-\overline{z})+2(\overline{z}-z)=0$$

$(z-\overline{z})(z\overline{z}-2)=0$ より，$z=\overline{z}$，$z\overline{z}=2$

(i)　$z=\overline{z}$ のとき

z は実数なので点 z は実軸上にある。

$$0\leqq\frac{z}{2}+\frac{1}{z}\leqq 2 \text{ より，} 0\leqq\frac{z^2+2}{2z}\leqq 2$$

まず，$z^2+2>0$ なので左側の不等式は，$z>0$

すると，右側の不等式は，$z^2+2\leqq 4z$，$z^2-4z+2\leqq 0$

$$2-\sqrt{2}\leqq z\leqq 2+\sqrt{2}$$

(ii)　$z\overline{z}=2$ のとき

$|z|^2=2$ なので点 z は原点中心で半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある。

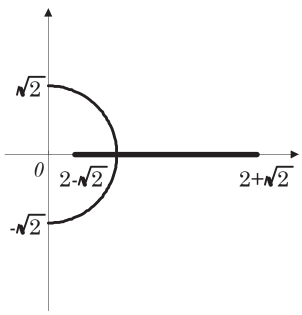
$z=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(-\pi\leqq\theta<\pi)$ とおくと，

$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\sqrt{2}\cos\theta$$

$0\leqq\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}\leqq 2$ より，$0\leqq\sqrt{2}\cos\theta\leqq 2$

よって，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

(i)(ii)をまとめて図示すると，右図のようになる。ただし，端点は含む。



［解　説］

$\boxed{6}$ との選択題です。複素数の頻出タイプの問題で，本年，神戸大・文系でも同じような出題がありました。なお，(ii)の場合に $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ の値がこの複素数の実部と等しくなっていますが，これは $\overline{z}=\dfrac{2}{z}$ を代入すると $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ となることからわかります。しかし，この変形はなかなか思いつくものではありません。

$\boxed{6}$ 問題のページへ

(1)　日曜日生まれが k 人，土曜日生まれが m 人，その他の曜日生まれが $13-k-m$ 人より，

$$P(X=k,\ Y=m)={}_{13}\mathrm{C}_{k}\,{}_{13-k}\mathrm{C}_{m}\left(\frac{1}{7}\right)^{k}\left(\frac{1}{7}\right)^{m}\left(\frac{5}{7}\right)^{13-k-m}$$
$$=\frac{13!}{k!(13-k)!}\cdot\frac{(13-k)!}{m!(13-k-m)!}\cdot\frac{5^{13-k-m}}{7^{13}}$$
$$=\frac{13!}{k!m!(13-k-m)!}\cdot\frac{5^{13-k-m}}{7^{13}}$$

(2)　$P(X=k,\ Y=2)=\dfrac{13!}{k!2!(13-k-2)!}\cdot\dfrac{5^{13-k-2}}{7^{13}}=\dfrac{13!}{2\cdot7^{13}}\cdot\dfrac{5^{11-k}}{k!(11-k)!}$

$P(X=k,\ Y=2)=P_k$ とおくとき，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}=\dfrac{\dfrac{5^{10-k}}{(k+1)!(10-k)!}}{\dfrac{5^{11-k}}{k!(11-k)!}}=\dfrac{11-k}{5(k+1)}$

$$P_{k+1}>P_k\iff\frac{P_{k+1}}{P_k}>1\iff\frac{11-k}{5(k+1)}>1\iff k<1\iff k=0$$
$$P_{k+1}=P_k\iff\frac{P_{k+1}}{P_k}=1\iff\frac{11-k}{5(k+1)}=1\iff k=1$$
$$P_{k+1}<P_k\iff\frac{P_{k+1}}{P_k}<1\iff\frac{11-k}{5(k+1)}<1\iff k>1\iff k\geqq2$$

以上より，$P_0<P_1=P_2>P_3>\cdots\cdots>P_{11}$

よって，$k=1$ または 2 のとき，$P(X=k,\ Y=2)$ は最大となる。

［解 説］

$\boxed{5}$ との選択題です。内容的には数学 B の確率というよりは数学 I の確率の問題です。(2)まで含めて，超頻出の問題です。