1

解答解説のページへ

面積 1 の三角形 ABC の各辺の長さをそれぞれ $\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$ とする。さらに, C から直線 AB へ下ろした垂線の足 D が線分 AB 上にあるとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{AD}=x$ とするとき, $a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ を, x を用いて表せ。

(2)　$a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ を最小にする x を求めよ。また, そのときの $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。

2

解答解説のページへ

$0<a<1$ とする。曲線 $y=1-x^2$ と $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし，A から x 軸に下ろした垂線の足を B とする。また，原点を O とし，線分 OB と線分 AB と曲線 $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 B の座標を求めよ。

(2)　面積 S を，a を用いて表せ。

(3)　面積 S を最大にする a の値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

次の命題の真偽を述べ，その理由を説明せよ。ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(2)　x が実数であるとき，x^2+x が有理数ならば，x は有理数である。

(3)　x，y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である。

$\boxed{4}$

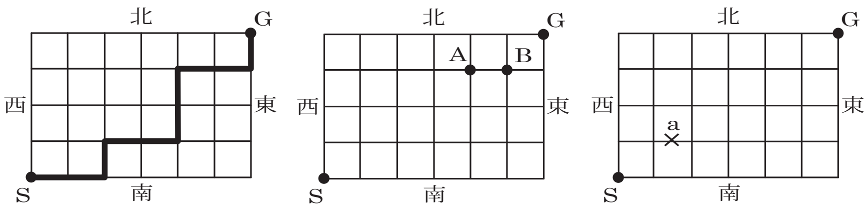
解答解説のページへ

図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

(3)　図 3 の a の部分が通行止めのとき, S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



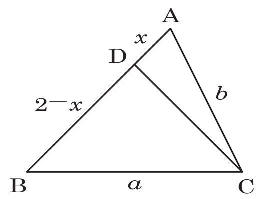
（図1）　（図2）　（図3）

1

問題のページへ

(1)　AD $= x$ とすると，BD $= 2 - x$

$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathrm{CD} = 1$ より，CD $= 1$



三平方の定理より，

$x^2 + 1 = b^2$ ………①

$(2 - x)^2 + 1 = a^2$ ………②

すると，①②より，

$$a^2 + (2\sqrt{3} - 1)b^2 = (2 - x)^2 + 1 + (2\sqrt{3} - 1)(x^2 + 1)$$
$$= 2\sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3} + 4$$

(2)　(1)より，$2\sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3} + 4 = 2\sqrt{3}\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \dfrac{4}{3}\sqrt{3} + 4$

$0 < x < 2$ より，$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値をとる。

このとき，①より $b^2 = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$，$b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であり，$\cos\angle \mathrm{BAC} = \dfrac{x}{b} = \dfrac{1}{2}$ なので，

$\angle \mathrm{BAC} = 60°$ となる。

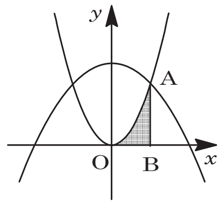
［解　説］

一見，難しそうな図形問題ですが，必要な知識は三平方の定理だけでした。

2

問題のページへ

(1)　$y=1-x^2$ ………①，$y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ ………②



①②より，$1-x^2=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$

$\dfrac{1}{a^2}x^2=1$ となるので，$x=\pm a$

$a>0$ より，B$(a,\ 0)$

(2)　$S=\displaystyle\int_0^a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2dx=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{1}{3}(a-a^3)$

(3)　$S'=\dfrac{1}{3}(1-3a^2)$

右の増減表より，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，

S は最大値をとる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

［解 説］

センター試験のレベルよりも基本的です。注意するのは計算ミスだけです。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　命題は真である。理由は以下の通り。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であるとすると，p，q を自然数として，$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ と表せる。

$$p(\sqrt{2}+\sqrt{3})=q,\quad p^2(5+2\sqrt{6})=q^2,\quad \sqrt{6}=\frac{q^2-5p^2}{2p^2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$は左辺が無理数，右辺が有理数なので，成立しない。

よって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(2)　命題は偽である。反例は以下の通り。

$x=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ とすると x は無理数であるが，このとき，

$$x^2+x=x(x+1)=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

したがって，x^2+x は有理数である。

(3)　命題は偽である。反例は以下の通り。

$x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$ とすると，x, y はともに無理数であるが，このとき，

$$x+y=2,\quad x^2+y^2=6$$

したがって，$x+y$，x^2+y^2 はともに無理数ではない。

［解 説］

(2)と(3)では，$\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ とか $1\pm\sqrt{2}$ が無理数であることは証明していません。念には念を入れて答案を作るのであれば，これも(1)と同じように示した方がよいでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　東方向に 1 区画進むのを→，北方向に 1 区画進むのを↑で表すと，S 地点から G 地点に至る 1 つの経路は，→を 6 個，↑を 4 個を 1 列に並べる順列に対応するので，求める経路の数は，

$$\frac{10!}{6!4!}=210\text{通り}$$

(2)　(1)と同様に考えて，S 地点から A 地点へは $\dfrac{7!}{4!3!}=35$ 通り，A 地点から B 地点へは 1 通り, B 地点から G 地点へは 2 通りより，求める経路の数は，

$$35\times1\times2=70\text{通り}$$

(3)　a の部分を通る場合は，(2)の A 地点と B 地点をともに通る場合と対等なので，その経路の数は, 70 通りとなる。

　よって, a の部分を通らない経路の数は，$210-70=140$ 通り

［解 説］

有名な経路問題です。複雑な仕掛けはまったくありませんでした。