

1

[解答解説のページへ](#)

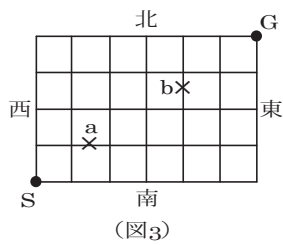
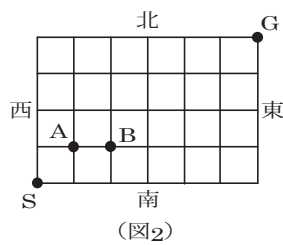
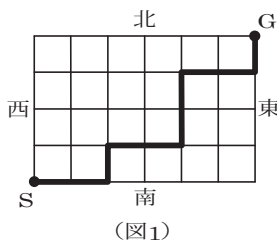
三角形 ABC において、面積が 1 で $AB = 2$ であるとき、 $BC^2 + (2\sqrt{3} - 1)AC^2$ の値を最小にするような $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

2

解答解説のページへ

図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して、道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

- (1) S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。
- (2) S 地点から G 地点に至る経路のうち、図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。
- (3) 図 3 の a, b の 2 か所が通行止めするとき、S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



3

解答解説のページへ

xy 平面上の 2 直線 L_1, L_2 を

$$L_1 : y = 0 \text{ (} x \text{ 軸)}, L_2 : y = \sqrt{3}x$$

で定める。P を xy 平面上の点とする。直線 L_1 に関して P と対称な点を Q, 直線 L_2 に関して P と対称な点を R とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) P の座標を (a, b) とするとき, R の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) 2 点 Q, R の距離が 2 になるような P の軌跡 C を求めよ。
- (3) 点 P が C 上を動くとき, 三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ。

4

解答解説のページへ

$f(x)$ を周期 1 の周期関数とする。すなわち $f(x+1) = f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする。
 a を実数とし、 $p = \int_0^1 e^{ax} f(x) dx$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とするととき、 $\int_n^{n+1} e^{ax} f(x) dx$ を p を用いて表せ。
- (2) n を自然数とするととき、 $\int_0^n e^{ax} f(x) dx$ を p を用いて表せ。
- (3) 周期 1 の周期関数 $f(x)$ が $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x) = -\left|x - \frac{1}{2}\right| + \frac{3}{2}$ であるとき、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} f(x) dx$ を求めよ。

5

[解答解説のページへ](#)

関数 $f(x) = \frac{1}{1+e^{-px}} - ax$ が極値をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。ただし、 p は正の定数で、 e は自然対数の底である。

1

問題のページへ

$BC = a$, $CA = b$, $\angle BAC = \theta$ とおくと,

$$\text{条件より, } \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b \sin \theta = 1, \quad b \sin \theta = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{余弦定理より, } a^2 = 4 + b^2 - 4b \cos \theta \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, $l = a^2 + (2\sqrt{3} - 1)b^2$ とおくと, ①②より,

$$l = 4 + b^2 - 4b \cos \theta + (2\sqrt{3} - 1)b^2$$

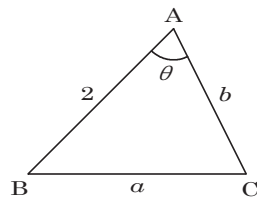
$$= 2\sqrt{3}b^2 - 4b \cos \theta + 4$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sin^2 \theta} - \frac{4 \cos \theta}{\sin \theta} + 4$$

$$l' = 2\sqrt{3} \cdot \frac{-2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} - 4 \cdot \frac{-1}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{-4\sqrt{3} \cos \theta + 4 \sin \theta}{\sin^3 \theta}$$

$$= \frac{8}{\sin^3 \theta} \cdot \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)$$



θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$...	π
l'		-	0	+	
l		↘		↗	

増減表より, l が最小になるのは, $\theta = \frac{\pi}{3}$ のときである。

[解説]

文系に誘導つきで同じ問題が出ています。理系では誘導がありませんので、異なった解法となりました。

2

問題のページへ

- (1) 東方向に 1 区画進むのを \rightarrow 、北方向に 1 区画進むのを \uparrow で表すと、S 地点から G 地点に至る 1 つの経路は、 \rightarrow を 6 個、 \uparrow を 4 個を 1 列に並べる順列に対応するので、求める経路の数は、

$$\frac{10!}{6!4!} = 210 \text{ 通り}$$

- (2) (1)と同様に考えて、S 地点から A 地点へは 2 通り、A 地点から B 地点へは 1 通り、B 地点から G 地点へは $\frac{7!}{4!3!} = 35$ 通りより、求める経路の数は、

$$2 \times 1 \times 35 = 70 \text{ 通り}$$

- (3) (2)より a 点を通る経路の数は、70 通りとなる。

また、b 点を通る経路の数は、 $\frac{6!}{4!2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} = 45$ 通り、a 点と b 点をともに通る

経路の数は、 $2 \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} = 18$ 通りとなる。

よって、a 点、b 点を少なくとも 1 回通る経路の数は、 $70 + 45 - 18 = 97$ 通りである。

(1)より、a 点と b 点をともに通らない経路の数は、 $210 - 97 = 113$ 通りとなる。

[解説]

有名な経路問題です。複雑な仕掛けはまったくありませんでした。文系にほとんど同じ問題が出ています。

3

問題のページへ

- (1)
- L_2
- の法線ベクトルを
- $\vec{n} = (-\sqrt{3}, 1)$
- とすることができるので、

$$\vec{OR} = \vec{OP} + k\vec{n} = (a - \sqrt{3}k, b + k) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

PR の中点が直線 $L_2 : y = \sqrt{3}x$ 上にあるので、

$$\frac{b + (b + k)}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{a + (a - \sqrt{3}k)}{2}$$

$$2b + k = 2\sqrt{3}a - 3k, \quad k = \frac{1}{2}(\sqrt{3}a - b)$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入し, } \vec{OR} = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \right)$$

$$\text{よって, } R \left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b, \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b \right)$$

- (2)
- $Q(a, -b)$
- で、条件より
- $QR = 2$
- なので、

$$\left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - a \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b + b \right)^2 = 4$$

$$\frac{3}{4} \left\{ (-\sqrt{3}a + b)^2 + (a + \sqrt{3}b)^2 \right\} = 4$$

まとめると、 $a^2 + b^2 = \frac{4}{3}$ より、点 P は円 $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$ を描く。

- (3)
- $\triangle PQR$
- の面積を
- S
- として、
- $S = \frac{1}{2} \cdot |2b| \cdot \left| -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b - a \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} |b(-\sqrt{3}a + b)|$

(2) より、 $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta$ 、 $b = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta$ とおくことができるので、

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta \left(-2 \cos \theta + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \sin^2 \theta - \sqrt{3} \sin \theta \cos \theta \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1 - (\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta) \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1 - 2 \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) \right|$$

よって、 $\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{6} \right) = -1$ のとき、 S は最大値 $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ をとる。

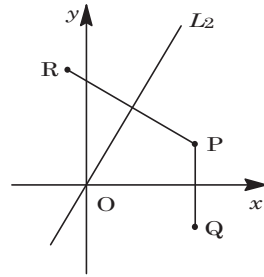
このとき、 n を整数として、 $2\theta + \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$ 、 $\theta = n\pi + \frac{2}{3}\pi$

$$\text{よって, } (a, b) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{2}{3}\pi, \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \right)$$

$$(a, b) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{5}{3}\pi, \sin \frac{5}{3}\pi \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 \right)$$

[解説]

問題の流れに乗っていけば、(3)の結論まで到達できます。特別な技法などは必要ありません。



4

問題のページへ

(1) $f(x+1) = f(x)$ より, 帰納的に $f(x+n) = f(x)$ となる。 $x-n = t$ とおくと $dx = dt$ で, $x = n \rightarrow x = n+1$ のとき $t = 0 \rightarrow t = 1$ である。

$$\int_n^{n+1} e^{ax} f(x) dx = \int_0^1 e^{a(t+n)} f(t+n) dt = e^{an} \int_0^1 e^{at} f(t) dt = pe^{an}$$

(2) $\int_0^n e^{ax} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^{ax} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} pe^{ak}$ となるので,(i) $a \neq 0$ のとき

$$\int_0^n e^{ax} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} pe^{ak} = p \cdot \frac{1-e^{an}}{1-e^a}$$

(ii) $a = 0$ のとき

$$\int_0^n e^{ax} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} pe^0 = pn$$

(3) $0 \leq x < \frac{1}{2}$ のとき $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = x + 1$ また, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = -x + 2$

$$p = \int_0^1 e^{-x} f(x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)e^{-x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-x+2)e^{-x} dx$$

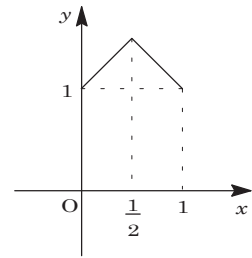
$$= -\left[(x+1)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx - \left[(-x+2)e^{-x}\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x} dx$$

$$= -\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) - \left(e^{-\frac{1}{2}} - 1\right) - \left(e^{-1} - \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2 - 2e^{-\frac{1}{2}}$$

(2)より, $\int_0^n e^{-x} f(x) dx = \left(2 - 2e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$ となるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} f(x) dx = \left(2 - 2e^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{1-e^{-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \frac{e}{e-1} = \frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}$$



[解説]

前問と同じく, 正確な計算力と問題文の読解力があれば完答できます。ただ, (2)では場合分けをするという注意力も必要です。

5

問題のページへ

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-px}} - ax \text{ より,}$$

$$f'(x) = -\frac{-pe^{-px}}{(1+e^{-px})^2} - a = \frac{pe^{-px}}{(1+e^{-px})^2} - a$$

ここで、 $e^{-x} = t$ とおき、 $t > 0$ で $g(t) = \frac{pt^p}{(1+t^p)^2}$ とすると、

$$g'(t) = \frac{p^2 t^{p-1} (1+t^p)^2 - pt^p \cdot 2(1+t^p) \cdot pt^{p-1}}{(1+t^p)^4}$$

$$= -\frac{p^2 t^{p-1} (t^p - 1)}{(1+t^p)^3}$$

増減表より、 $0 < g(t) \leq \frac{p}{4}$

すると、 $f(x)$ が極値をもつ条件、

t	0	...	1	...	∞
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	0	\nearrow	$\frac{p}{4}$	\searrow	0

すなわち $f'(x)$ が符号変化する条件は、 $f'(x) = g(e^{-x}) - a$ より $0 < a < \frac{p}{4}$ となる。

【解説】

意外なくらいあっさりと結論が導けました。 p の値での場合分けが必要だろうと予測しながら解いたのですが。