1

解答解説のページへ

正の定数 $a\,(a \neq 1)$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2(a+a^{-1})(a^{x}+a^{-x})+2(a+a^{-1})^{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a^{x}+a^{-x}=t$ とおくとき，t の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上で，原点 O を基準とする点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\vec{p}$ であるとき，点 P を $\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}(\vec{a})$ を原点 O と異なる点とする。

(i)　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{a}$ に垂直な直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$ が成り立つことを示せ。

(ii)　ベクトル方程式 $|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ で表される図形を図示せよ。

(2)　ベクトル $\vec{b}=(1,\ 1)$ に対して，不等式 $|\vec{p}-\vec{b}|\leqq|\vec{p}+3\vec{b}|\leqq 3|\vec{p}-\vec{b}|$ を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体が表す領域を図示せよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 実数α，β $(\alpha<\beta)$に対して，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$が成り立つことを示せ。

(2) a は実数で，$a\geqq 0$ とする。座標平面上で，不等式$x^2\leqq y\leqq|x-a|$の表す領域の面積$S(a)$を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 相加平均と相乗平均の関係より，$t = a^x + a^{-x} \geqq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2$

等号成立は$a^x = a^{-x}$，すなわち$x = 0$のときである。

したがって，$x = 0$のときtは最小値2をとる。

(2) $a^{2x} + a^{-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$より，

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^2 - 2) - 2(a + a^{-1})t + 2(a + a^{-1})^2 \\ &= t^2 - 2(a + a^{-1})t + 2(a + a^{-1})^2 - 2 \\ &= \left\{ t - (a + a^{-1}) \right\}^2 + a^2 + a^{-2} \end{aligned}$$

(1)より $t \geqq 2$ で，$a + a^{-1} > 2$なので，$t = a + a^{-1}$のとき$f(x)$は最小値$a^2 + a^{-2}$をとる。このときのxの値は，$a^x + a^{-x} = a + a^{-1}$から，$a^{2x} - (a + a^{-1})a^x + 1 = 0$

$$(a^x - a)(a^x - a^{-1}) = 0,\ x = \pm 1$$

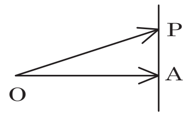
［解 説］

置き換えると 2 次関数が現れ，それを利用して最小値を求めるというセンターレベルの問題です。

2

問題のページへ

(1)　条件から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

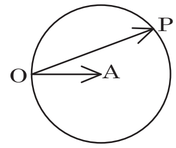


$$\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0,\ \vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$$

また，$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ より，$|\vec{p}-\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2=0$

$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$$

よって，点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を中心とする半径 OA の円を描き，これを図示すると右図のようになる。



(2)　$|\vec{p}-\vec{b}|\leqq|\vec{p}+3\vec{b}|\leqq3|\vec{p}-\vec{b}|$ より，

$$|\vec{p}-\vec{b}|^2\leqq|\vec{p}+3\vec{b}|^2\leqq9|\vec{p}-\vec{b}|^2$$

$\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと，$\vec{p}-\vec{b}=(x-1,\ y-1)$，$\vec{p}+3\vec{b}=(x+3,\ y+3)$ より，

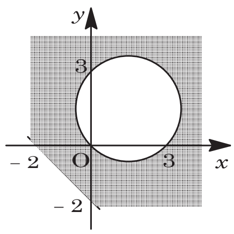
$$(x-1)^2+(y-1)^2\leqq(x+3)^2+(y+3)^2\leqq9\left\{(x-1)^2+(y-1)^2\right\}\cdots\cdots\text{①}$$

①の左側の不等式を変形すると，$x+y+2\geqq0$，$y\geqq-x-2\cdots\cdots$②

①の右側の不等式を変形すると，$x^2+y^2-3x-3y\geqq0$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\geqq\frac{9}{2}\cdots\cdots\text{③}$$

以上より，②と③を満たす領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

(2)の設問は，(1)の利用を考えると，かえって繁雑です。もっとも最初は，(1)を誘導として使おうとしましたが。

3

問題のページへ

(1)　$(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)=(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)$より，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_\alpha^\beta\left\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

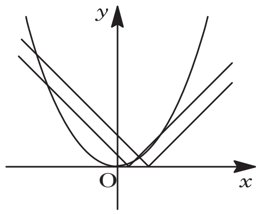
(2)　$y=x^2$と$y=-x+a\ (a\geqq 0)$の共有点は，$x^2+x-a=0$から，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

そこで，この値を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおく。

また，$y=x^2$と$y=x-a\ (a\geqq 0)$の共有点は，$x^2-x+a=0$から，

(i)　$1-4a\geqq 0\left(0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}\right)$のとき，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$となり，この値$x=\gamma,\ \delta$ $(\gamma<\delta)$とおく。

(ii)　$1-4a<0\left(a>\dfrac{1}{4}\right)$のとき，共有点はない。



さて，不等式$x^2\leqq y\leqq|x-a|$の表す領域の面積$S(a)$は，

(1)の等式を利用して，

(i)　$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}$のとき

$$S(a)=\int_\alpha^\beta(-x+a-x^2)\,dx+\int_\gamma^\delta(x-a-x^2)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3-\left(-\frac{1}{6}\right)(\delta-\gamma)^3=\frac{1}{6}\left\{\left(\sqrt{1+4a}\right)^3+\left(\sqrt{1-4a}\right)^3\right\}$$

(ii)　$a>\dfrac{1}{4}$のとき

$$S(a)=\int_\alpha^\beta(-x+a-x^2)\,dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{1+4a}\right)^3$$

［解 説］

(1)は有名公式の証明です。もし，この設問がなかったとしても，(2)ではこの公式を用います。