1

解答解説のページへ

平面上に，同一直線上にない 3 定点 O，A，B があり，線分 OA，OB の長さはそれぞれ 9, 4 である。動点 P, Q は同時に O を出発し，P は線分 OA 上を秒速 3 で，Q は線分 OB 上を秒速 2 でそれぞれ往復運動をくり返しているとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　出発してから初めて P, Q が O で出会うのは何秒後か。

(2)　出発してから 5 秒後の PQ の長さは 4 であった。∠AOB の余弦と正弦の値を求めよ。

(3)　出発してから t 秒後の OP，OQ の長さをそれぞれ x，y とする。点$(x,\ y)$の軌跡を $0\leqq t\leqq 6$ の範囲で xy 平面上に図示せよ。

2

解答解説のページへ

方程式$z^6+1=0$を満たす 6 個の複素数を，偏角θ ($0° \leqq \theta < 360°$) の小さい順にα_1，α_2，…，α_6とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　α_1，α_2，…，α_6を求め，複素数平面上に図示せよ。

(2)　$\alpha_k\alpha_l = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$となる$(k,\ l)$を求めよ。

(3)　複素数$z \neq 0$に対し，サイコロを振って出た目がkならばα_kをかけるという操作を行う。こうして得られた複素数に対し，再びサイコロを振り同じ操作を行って得られる複素数をwとする。複素数0，z，wの表す 3 点が正三角形をなす確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

2 つの 2 次関数 $y=-x^2+1$ と $y=qx^2+px+2$ が $0<x<1$ の範囲で共有点をもち，かつその点で共通の接線をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 上の条件を満たすような点$(p,\ q)$を pq 平面上に図示せよ。

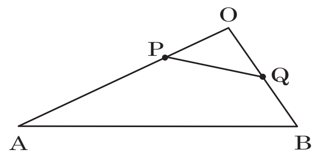
(2) 共有点の x 座標を$\alpha\,(0<\alpha<1)$とし，

$$f(x)=\begin{cases} qx^2+px+2 & (0\leqq x<\alpha) \\ -x^2+1 & (\alpha\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

とおく。このとき積分$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$を p で表せ。

1

問題のページへ



(1)　P が OA を往復する時間は $\dfrac{9\times2}{3}=6$ 秒，Q が OB を往復する時間は $\dfrac{4\times2}{2}=4$ 秒である。

すると，6 と 4 の最小公倍数は 12 なので，出発してから初めて P, Q が O で出会うのは 12 秒後となる。

(2)　(2)　5 秒後に P は $3\times5=15$ 移動しているので，$\mathrm{OP}=18-15=3$

また, Q は $2\times5=10$ 移動しているので，$\mathrm{OQ}=10-8=2$

このとき $\mathrm{PQ}=4$ なので $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{9+4-16}{2\cdot3\cdot2}=-\frac{1}{4}$$

また，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(3)　まず，点 P は 3 秒後に A に到達するので，$0\leqq t\leqq3$ のとき $x=3t$，$3\leqq t\leqq6$ のとき $x=-3(t-3)+9=-3t+18$ となる。

また，点 Q は 2 秒後に B，4 秒後に O に到達するので，$0\leqq t\leqq2$ のとき $y=2t$，$2\leqq t\leqq4$ のとき $y=-2(t-2)+4=-2t+8$，$4\leqq t\leqq6$ のとき $y=2(t-4)=2t-8$ となる。

したがって, $0\leqq t\leqq2$ のとき，$(x,\ y)=(3t,\ 2t)$ より，$y=\dfrac{2}{3}x\ (0\leqq x\leqq6)$

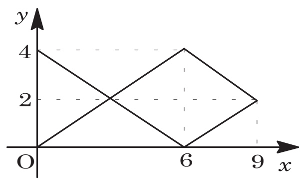
$2\leqq t\leqq3$ のとき，$(x,\ y)=(3t,\ -2t+8)$ より，$y=-\dfrac{2}{3}x+8\ (6\leqq x\leqq9)$

$3\leqq t\leqq4$ のとき，$(x,\ y)=(-3t+18,\ -2t+8)$ より，$y=\dfrac{2}{3}x-4\ (6\leqq x\leqq9)$

$4\leqq t\leqq6$ のとき，$(x,\ y)=(-3t+18,\ 2t-8)$ より，

$$y=-\frac{2}{3}x+4\ (0\leqq x\leqq6)$$

このとき，点 $(x,\ y)$ の軌跡を xy 平面上に図示すると，右図のようになる。



［解 説］

1 題 30 分と時間も十分にあるので，ていねいに解いていくことがポイントとなります。

2

問題のページへ

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0^\circ\leqq\theta<360^\circ)$ とおくと，$z^6=-1$ より，

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ$$

まず，$r^6=1$ から $r=1$ となり，また $6\theta=360^\circ\times k+180^\circ$ $(0\leqq k\leqq 5)$ から，

$$\theta=30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 210^\circ,\ 270^\circ,\ 330^\circ$$

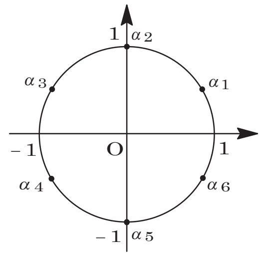
よって，$\alpha_1=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$\alpha_2=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$

$$\alpha_3=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$\alpha_4=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$$

$$\alpha_5=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ=-i$$

$$\alpha_6=\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$



(2)　$\alpha_k\alpha_l=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ$ で，$\arg\alpha_k\alpha_l=\arg\alpha_k+\arg\alpha_l$ より，

$$\arg\alpha_k+\arg\alpha_l=60^\circ,\ \arg\alpha_k+\arg\alpha_l=360^\circ+60^\circ=420^\circ$$

(i)　$\arg\alpha_k+\arg\alpha_l=60^\circ$ の場合　$(k,\ l)=(1,\ 1)$

(ii)　$\arg\alpha_k+\arg\alpha_l=420^\circ$ の場合

$$(k,\ l)=(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$$

(3)　3 点 $0,\ z,\ w$ が正三角形をなす条件は，

$$w=(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}z,\quad w=(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}z$$

(2)より，$\alpha_k\alpha_l=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ となる $(k,\ l)$ は 6 通りある。また $\alpha_k\alpha_l=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ となる $(k,\ l)$ は，(2)と同様にして $(1,\ 5)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 3)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$，$(6,\ 6)$ の 6 通りとなる。

よって，求める確率は，$\dfrac{6+6}{6^2}=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

複素数と確率という異分野が並んでいますが，題意をつかむと，(2)は(3)の誘導となっていることがわかります。

3

問題のページへ

(1)　$y=-x^2+1$ ……①，$y=qx^2+px+2$ ……②として，$x=\alpha$ $(0<\alpha<1)$ で①と②が接するとすると，

$$-\alpha^2+1=q\alpha^2+p\alpha+2 \cdots\cdots③$$

①より $y'=-2x$，②より $y'=2qx+p$ なので，

$$-2\alpha=2q\alpha+p \cdots\cdots④$$

④より $(2q+2)\alpha+p=0$ となり，$q\neq-1$ のとき $\alpha=\dfrac{-p}{2q+2}$ ………⑤

⑤を③に代入して，$(q+1)\left(\dfrac{-p}{2q+2}\right)^2+p\cdot\dfrac{-p}{2q+2}+1=0$

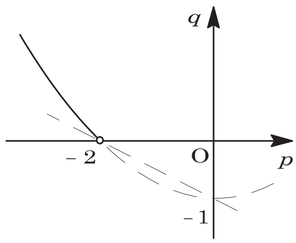
$$-\frac{p^2}{4(q+1)}+1=0,\ p^2=4q+4,\ q=\frac{1}{4}p^2-1\ (q\neq-1) \cdots\cdots⑥$$

ここで $0<\alpha<1$ なので，⑤より $0<\dfrac{-p}{2q+2}<1$

$q>-1$ より，$0<-p<2q+2$ となり，$p<0$ かつ $q>-\dfrac{1}{2}p-1$

なお，$q=-1$ のときは，④より $p=0$ となるが，③は $-\alpha^2+1=-\alpha^2+2$ となり，成立しない。

よって，条件を満たす点 $(p,\ q)$ を図示すると，右図の放物線の実線部分となる。



(2)　⑤⑥より，$\alpha=\dfrac{-p}{2(q+1)}=\dfrac{-p}{2\cdot\frac{1}{4}p^2}=-\dfrac{2}{p}$ なので，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx&=\int_0^\alpha (qx^2+px+2)\,dx+\int_\alpha^1(-x^2+1)\,dx\\&=\left[\frac{q}{3}x^3+\frac{p}{2}x^2+2x\right]_0^\alpha+\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_\alpha^1\\&=\frac{q}{3}\alpha^3+\frac{p}{2}\alpha^2+2\alpha-\frac{1}{3}(1-\alpha^3)+(1-\alpha)\\&=\frac{1}{12}p^2\alpha^3+\frac{1}{2}p\alpha^2+\alpha+\frac{2}{3}=\frac{1}{12}p^2\left(-\frac{2}{p}\right)^3+\frac{1}{2}p\left(-\frac{2}{p}\right)^2-\frac{2}{p}+\frac{2}{3}\\&=-\frac{2}{3p}+\frac{2}{3}=\frac{2p-2}{3p}\end{aligned}$$

［解 説］

共通接線をもつ条件である③と④をていねいに式変形していけば，正解に到達できます。