1

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) A^2, A^4 を求めよ。

(2) $A^3+2A^2+4A+8E$ を求めよ。

(3) $E+\dfrac{1}{2}A+\left(\dfrac{1}{2}A\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}A\right)^{2001}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

整式 $f(x)$ は関係式 $\int_0^x f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x + 2\int_x^0 f(x)\,dx$ を満たしている。また $r \geqq 0$ に対し，$|x| \leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求め，$y = |f(x)|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(r)$ を求めよ。

(3)　$\int_0^2 F(r)\,dr$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

nを自然数とする。数wは,

$$w = 2^i + 2^j + 2^k \quad (i,\ j,\ k \text{ は自然数で } 1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$n = 7$とする。w の値が2^8，$2^6 + 2^4$となるそれぞれの場合について，$(i,\ j,\ k)$をすべて求めよ。

(2)　n を一般の自然数とする。$2^r + 2^s$（r, s は自然数で $r < s$）の形で表される w の値は全部で何個あるか。

(3)　一般の自然数nに対し, wの値は全部で何個あるか。

4

解答解説のページへ

2 次関数 $y=f(x)$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通り $(p>0)$，曲線 $y=e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y=e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x=0$，$x=p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1，F_2 を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。このとき V_1，V_2 の値を, p を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$A^2=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4E$，$A^4=(-4E)^2=16E$

(2)　(1)より，$A^3+2A^2+4A+8E=(-4E)A+2(-4E)+4E+8E$

$$=-4A-8E+4A+8E=O$$

(3)　$B=E+\frac{1}{2}A+\left(\frac{1}{2}A\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}$とおくと,

$$\left(E-\frac{1}{2}A\right)B=\left(E-\frac{1}{2}A\right)\left\{E+\frac{1}{2}A+\left(\frac{1}{2}A\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}\right\}$$

$$=E-\left(\frac{1}{2}A\right)^{2002}=E-\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}A^{2002}$$

ここで, (1)より，$A^{2002}=(A^4)^{500}A^2=(2^4E)^{500}(-4E)=-2^{2002}E$なので,

$$\left(E-\frac{1}{2}A\right)B=E+\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}\cdot 2^{2002}E=2E$$

さて，$E-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$より，$\left(E-\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$となり,

$$B=\left(E-\frac{1}{2}A\right)^{-1}\cdot 2E=2\left(E-\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

［解 説］

行列の和についての頻出問題です。(1)の結果の利用を考えるのがすべてです。

2

問題のページへ

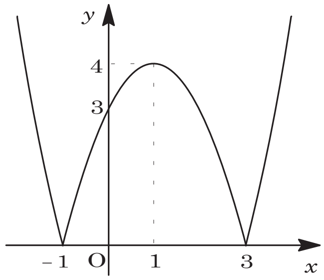
(1) $\int_0^x f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x + 2\int_x^0 f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x - 2\int_0^x f(x)\,dx$ より，

$$3\int_0^x f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x$$

両辺を微分すると，$3f(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

ここで，$y = |f(x)|$ のグラフは，$f(x) \geqq 0$ のとき $y = f(x)$，$f(x) < 0$ のとき $y = -f(x)$ より，右図のようになる。



(2) $f(x) = 4$ の解は，$x^2 - 2x - 3 = 4$，$x^2 - 2x - 7 = 0$

$$x = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$|x| \leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値は, (1)のグラフより，

(i) $0 \leqq r < 1$ のとき　$x = r$ において最大値をとる。

$$F(r) = |f(r)| = -(r^2 - 2r - 3) = -r^2 + 2r + 3$$

(ii) $1 \leqq r < -1 + 2\sqrt{2}$ のとき　$x = 1$ において最大値をとる。

$$F(r) = |f(1)| = 4$$

(iii) $-1 + 2\sqrt{2} \leqq r$ のとき　$x = -r$ において最大値をとる。

$$F(r) = |f(-r)| = (-r)^2 - 2(-r) - 3 = r^2 + 2r - 3$$

(3)
$$\int_0^2 F(r)\,dr = \int_0^1 (-r^2 + 2r + 3)\,dr + \int_1^{-1+2\sqrt{2}} 4\,dr + \int_{-1+2\sqrt{2}}^2 (r^2 + 2r - 3)\,dr$$
$$= -\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3 + 4(-1 + 2\sqrt{2} - 1) + \int_{-1+2\sqrt{2}}^2 \left\{(r+1)^2 - 4\right\}dr$$
$$= -\frac{13}{3} + 8\sqrt{2} + \left[\frac{1}{3}(r+1)^3 - 4r\right]_{-1+2\sqrt{2}}^2$$
$$= -\frac{13}{3} + 8\sqrt{2} + \frac{1}{3}(27 - 16\sqrt{2}) - 4(3 - 2\sqrt{2}) = -\frac{22}{3} + \frac{32}{3}\sqrt{2}$$

［解　説］

(3)の計算は複雑ですが，内容は基本レベルです。

3

問題のページへ

(1)　まず, $1 \leqq i \leqq j \leqq k$ において, $2^i+2^j=2^k$ を満たすのは $(i,\ j)=(k-1,\ k-1)$ に限ることを示す。

$i<j$ とすると, $2^i(1+2^{j-i})=2^k$, $1+2^{j-i}=2^{k-i}$ となるが, $j-i \geqq 1$, $k-i \geqq 1$ より左辺は奇数, 右辺は偶数となるので成立しない。よって $i=j=k-1$ である。

さて, $1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq 7$ において, $w=2^i+2^j+2^k$ ……①とする。

$w=2^8$ のとき, ①は $2^i+2^j+2^k=2^8$ となり, $2^k<2^8$ より $k \leqq 7$ である。また, $2^8=2^i+2^j+2^k \leqq 3\cdot 2^k$ より, $\dfrac{2^8}{3} \leqq 2^k$, $7 \leqq k$ なので, $k=7$ となる。

このとき $2^i+2^j=2^8-2^7=2^7$ となり, $(i,\ j)=(6,\ 6)$ である。

以上より, $(i,\ j,\ k)=(6,\ 6,\ 7)$

$w=2^6+2^4$ のとき, ①は $2^i+2^j+2^k=2^6+2^4<2^7$ となり, $2^k<2^7$ より $k \leqq 6$ である。また, $2^6+2^4=2^i+2^j+2^k \leqq 3\cdot 2^k$ より, $\dfrac{2^6+2^4}{3} \leqq 2^k$, $5 \leqq k$ なので, $k=5,\ 6$ となる。

$k=5$ のとき, $2^i+2^j=2^6+2^4-2^5=2^5+2^4<2^6$ となり, $2^j<2^6$ より $j \leqq 5$ であり, また $2^5+2^4=2^i+2^j \leqq 2\cdot 2^j$ より, $2^4+2^3 \leqq 2^j$, $5 \leqq j$ である。よって, $j=5$ となり, $2^i=2^4$ から $i=4$ となる。

$k=6$ のとき, $2^i+2^j=2^6+2^4-2^6=2^4$ となり, $(i,\ j)=(3,\ 3)$ である。

以上より, $(i,\ j,\ k)=(4,\ 5,\ 5)$, $(3,\ 3,\ 6)$

(2)　まず, 1 つの w の値に対して, $w=2^r+2^s$ $(1 \leqq r<s)$ を満たす $(r,\ s)$ の値がただ 1 組しか存在しないことを示す。

$1 \leqq r<s$, $1 \leqq r'<s'$ として, $2^r+2^s=2^{r'}+2^{s'}$ ……②とおく。

$r<r'$ とすると, ②の両辺を 2^r で割って $1+2^{s-r}=2^{r'-r}+2^{s'-r}$ となるが, 左辺は奇数, 右辺は偶数となるので成立しない。$r>r'$ のときも同様に成立しないので, $r=r'$ となる。

すると, ②より $s=s'$ となり, 1 つの w の値に対して $(r,\ s)$ の値がただ 1 組しか存在しないので, 2^r+2^s の形で表される w の個数は $(r,\ s)$ の個数と一致する。

さて, $w=2^i+2^j+2^k=2^r+2^s$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n,\ r<s)$ ……③として,

(i)　$1 \leqq i<j<k \leqq n$ のとき　③は明らかに不成立。

(ii)　$1 \leqq i=j<k \leqq n$ のとき　③は $w=2^j+2^j+2^k=2^{j+1}+2^k$

$j+1<k$ のときは $j+1=r$, $k=s$ とおくと, $w=2^r+2^s$ $(2 \leqq r<s \leqq n)$

$j+1=k$ のときは $w=2^{j+1}+2^k=2^k+2^k=2^{k+1}$ となり不適。

(iii)　$1 \leqq i<j=k \leqq n$ のとき　③は $w=2^i+2^j+2^j=2^i+2^{j+1}$

$i=r$, $j+1=s$ とおくと, $w=2^r+2^s$ $(1 \leqq r<s \leqq n+1)$

(iv) $1 \leqq i = j = k \leqq n$ のとき　③は $w = 2^i + 2^i + 2^i = 2^i + 2^{i+1}$

$i = r$，$i + 1 = s$ とおくと，$w = 2^r + 2^s\ (1 \leqq r < s \leqq n+1)$

以上より，$w = 2^r + 2^s$ となる $(r,\ s)$ の条件は，$1 \leqq r < s \leqq n+1$ である。したがって，$(r,\ s)$ の個数すなわち w の値は，全部で ${}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{1}{2}(n+1)n$ 個ある。

(3)　(2)より，$w = 2^i + 2^j + 2^k$（$1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n$）は，$r < s < t$ として，次の 3 つの場合に分類できる。

(i)　$1 \leqq i < j < k \leqq n$ のとき

$i = r$，$j = s$，$k = t$ とおくと，$w = 2^r + 2^s + 2^t\ (1 \leqq r < s < t \leqq n)$ となる。

さて，1 つの w の値に対して，$w = 2^r + 2^s + 2^t\ (1 \leqq r < s < t)$ を満たす $(r,\ s,\ t)$ の値がただ 1 組しか存在しないことを示す。

$1 \leqq r < s < t$，$1 \leqq r' < s' < t'$ として，$2^r + 2^s + 2^t = 2^{r'} + 2^{s'} + 2^{t'}$ ……④とおく。

$r < r'$ とすると，④の両辺を 2^r で割って $1 + 2^{s-r} + 2^{t-r} = 2^{r'-r} + 2^{s'-r} + 2^{t'-r}$ となるが，左辺は奇数，右辺は偶数となるので成立しない。$r > r'$ のときも同様に成立しないので，$r = r'$ となる。

すると，④より $2^s + 2^t = 2^{s'} + 2^{t'}$ となり，(2)より $s = s'$，$t = t'$ である。

よって，1 つの w の値に対して $(r,\ s,\ t)$ の値がただ 1 組しか存在しないので，$2^r + 2^s + 2^t$ の形で表される w の個数は $(r,\ s,\ t)$ の個数と一致する。

以上より，w の値は ${}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 個ある。

(ii)　$1 \leqq i = j < k \leqq n\ (j+1 < k)$，$1 \leqq i < j = k \leqq n$ または $1 \leqq i = j = k \leqq n$ のとき

(2)より，$w = 2^r + 2^s\ (1 \leqq r < s \leqq n+1)$ となり，w の値は $\dfrac{1}{2}(n+1)n$ 個ある。

(iii) $1 \leqq i = j < k \leqq n\ (j+1 = k)$ のとき

$w = 2^{k+1}$ となり，$k + 1 = r$ とおくと，$w = 2^r\ (3 \leqq r \leqq n+1)$

したがって，w の値は $n-1$ 個ある。

(i)(ii)(iii)より，w の値の個数は，

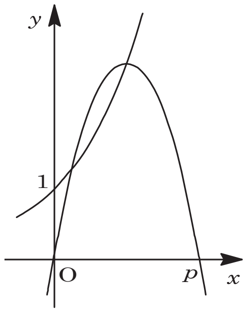
$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}(n+1)n + (n-1) = \frac{1}{6}(n^3 + 11n - 6)$$

［解 説］

金沢大の理系では，例年，難問が 1 題出ますが，本問がそれに相当します。しかし，今年は他の問題との難易差があまりにも大きすぎます。なお，この解は何度も書き直したものです。

4

問題のページへ



(1)　$y=f(x)$ のグラフは 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通るので，

x^2 の係数を a とおくと，

$$f(x)=ax(x-p)$$

条件より，頂点は $\left(\dfrac{p}{2},\ e^{\frac{p}{2}}\right)$ となるので，

$$e^{\frac{p}{2}}=a\cdot\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{2}\right),\ \ a=-\frac{4}{p^2}e^{\frac{p}{2}}$$

(2)　$V_1=\pi\displaystyle\int_0^p a^2x^2(x-p)^2dx=\pi a^2\int_0^p(x^4-2px^3+p^2x^2)dx$

$$=\pi a^2\left(\frac{p^5}{5}-2p\cdot\frac{p^4}{4}+p^2\cdot\frac{p^3}{3}\right)=\frac{\pi}{30}a^2p^5$$

$$=\frac{\pi}{30}\cdot\frac{16}{p^4}e^p\cdot p^5=\frac{8\pi}{15}pe^p$$

また，$V_2=\pi\displaystyle\int_0^p e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}\Big[e^{2x}\Big]_0^p=\frac{\pi}{2}(e^{2p}-1)$

(3)　(2)より，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{8}{15}\pi pe^p}{\frac{\pi}{2}(e^{2p}-1)}=\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{2p}{e^{2p}-1}e^p$ と変形すると，

$$\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}=\lim_{p\to+0}\frac{8}{15}\cdot\frac{2p}{e^{2p}-1}e^p=\frac{8}{15}$$

［解 説］

前問と比べると難易には雲泥の差があります。普通に計算を進めると正解に到達できます。