1

解答解説のページへ

関数 $f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+2|x|-\dfrac{15}{16}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $a>0$ とするとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ とする。$x\geqq 14$ ならば $f(x)>0$ となることを示せ。

(2)　自然数 a に対して，$b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ とおく。b も自然数となるような a と b の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

$f(z)=z^4+az^3+bz^2+cz+d$ を実数係数の 4 次多項式とする。

(1)　複素数 α が方程式 $f(z)=0$ の解ならば，α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ も解であることを示せ。

以下では，α は虚部が正で絶対値が 1 より大きい複素数とし，α，$\dfrac{1}{\alpha}$ がともに方程式 $f(z)=0$ の解になっているものとする。

(2)　方程式 $f(z)=0$ の α と異なる解のうち，虚部が正であるものを β とする。複素数平面において，点 α と点 β が直径の両端となる円を C とする。C の中心と半径を，α の絶対値 r と偏角 θ を用いて表せ。

(3)　原点 O から(2)の円 C へ接線を引き，接点の 1 つを w とする。w の絶対値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+2|x|-\dfrac{15}{16}$ に対して，

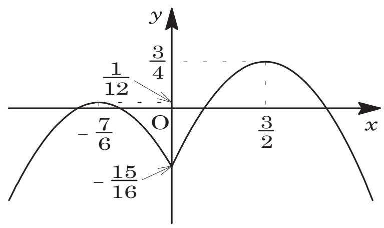
(i)　$x\geqq 0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

(ii)　$x<0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-2x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

これより，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



$x\geqq 0$ のとき, x 軸との交点は,

$$-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{15}{16}=0,\ \ 4x^2-12x+5=0$$

$$x=\frac{1}{2},\ \ x=\frac{5}{2}$$

$x<0$ のとき, x 軸との交点は,

$$-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{16}=0,\ \ 12x^2+28x+15=0,\ \ x=-\frac{3}{2},\ \ x=-\frac{5}{6}$$

よって，$f(x)\leqq 0$ の解は，図より $x\leqq -\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{5}{6}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{5}{2}\leqq x$ となる。

(2)　$f(x)$ の最大値は，図より $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx=2\int_{0}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx$

$$=2\int_{0}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2x-\frac{15}{16}\right)dx=2\left[-\frac{1}{4}x^3+x^2-\frac{15}{16}x\right]_0^a$$

$$=-\frac{1}{2}a^3+2a^2-\frac{15}{8}a$$

条件より，$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>0$ なので，$-\dfrac{1}{2}a^3+2a^2-\dfrac{15}{8}a>0$

$$4a^3-16a^2+15a<0,\ \ a(2a-5)(2a-3)<0$$

$a>0$ より，求める a の値の範囲は $\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{5}{2}$ である。

［解 説］

少し時間はかかりますが，グラフを書いた方が明快です。

© 電送数学舎 2002

2

問題のページへ

(1) $f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ に対して,

$$f'(x)=3x^2-12x-96=3(x+4)(x-8)$$

$x \geqq 14$ のとき $f'(x)>0$ なので，$f(x)>f(14)=144>0$

(2) $b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ ……①に対して, a, b は自然数より，$\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a} \geqq 1$

$$9a^2+98a+80 \geqq a^3+3a^2+2a,\quad a^3-6a^2-96a-80 \leqq 0$$

(1)より, $a \geqq 14$ のときは不成立なので, $1 \leqq a \leqq 13$………②

また，①より，$b(a^3+3a^2+2a)=9a^2+98a+80$ ………③

$$a(ba^2+3ba+2b-9a-98)=80$$

$ba^2+3ba+2b-9a-98$ は整数なので, a は 80 の約数となる。

よって，②より $a=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10$ ………④

さらに，③から，$ba(a+1)(a+2)=6(a^2+16a+13)+3a^2+2a+2$

$$ba(a+1)(a+2)-6(a^2+16a+13)=3a^2+2a+2$$

$a(a+1)(a+2)$，$6(a^2+16a+13)$ は 6 の倍数より，$3a^2+2a+2$ も 6 の倍数となる。これを満たす a は，④から $a=2,\ 8$ のみである。

$a=2$ のとき①より $b=13$，$a=8$ のとき①より $b=2$ となる。

以上より，$(a,\ b)=(2,\ 13),\ (8,\ 2)$

［解 説］

(1)の誘導を使えば，②まではすぐに導けるのですが, a の値を 13 個代入して b の値を計算する気にはなれません。また④に絞り込んでも，これだけではまだ腕力がかなり必要です。

© 電送数学舎 2002

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　α が $f(z)=0$ の解なので，$f(\alpha)=0$ より，$\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=0$

$$\overline{\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d}=\overline{0},\ \ \overline{\alpha}^4+\overline{a}\,\overline{\alpha}^3+\overline{b}\,\overline{\alpha}^2+\overline{c}\,\overline{\alpha}+\overline{d}=0$$

a, b, c, d が実数より，$\overline{\alpha}^4+a\overline{\alpha}^3+b\overline{\alpha}^2+c\overline{\alpha}+d=0$

よって，$f(\overline{\alpha})=0$ となり，$\overline{\alpha}$ も $f(z)=0$ の解である。

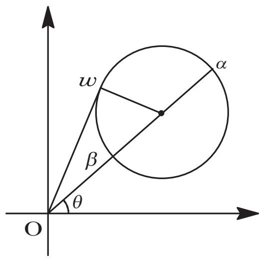
(2)　$f(z)=0$ の解が α，$\dfrac{1}{\alpha}$ なので, (1)より $\overline{\alpha}$，$\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も解となる。

ここで，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $\sin\theta>0$) とおくと,

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{r}\{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\},\ \ \overline{\alpha}=r\{(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

$$\frac{1}{\overline{\alpha}}=\frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

よって，$\beta=\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ となる。



このとき, 点 α と点 β を直径の両端とする円の中心は,

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

また, 円の直径が $r-\dfrac{1}{r}$ より，半径は $\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)$ である。

(3)　$\left|\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right|=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)$ なので，三平方の定理より,

$$|w|=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\right\}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$$

［解 説］

うまくまとまっている問題です。(1)から(2)へ，(2)から(3)へと自然に流れていきます。

© 電送数学舎 2002