1

解答解説のページへ

a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 $y=a\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を C とする。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき，接点を P とする。

(1)　l の方程式および P の座標を求めよ。

(2)　直線 $x=-1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし，x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を求めよ。

(3)　直線 l と直線 $x=-1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば，$S_1=2S_2$ が成り立つことを示せ。

2

解答解説のページへ

$x>0$ に対して, 2 次の行列 $A(x)$, B を

$$A(x)=\begin{pmatrix}\sqrt{1+3x^2} & 3x \\ x & \sqrt{1+3x^2}\end{pmatrix},\quad B=A(1)=\begin{pmatrix}2 & 3 \\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

と定める。

(1)　$x>1$ のとき, $0<y<x$ であって $A(x)=A(y)B$ を満たす実数 y が存在することを示せ。

(2)　行列 $A(x)$ の各成分が自然数であるとする。このとき, $A(x)=B^n$ となる自然数 n が存在することを示せ。

3　　解答解説のページへ

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を $r > 1$ かつ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする。複素数平面において, z, $\dfrac{1}{z}$, $\overline{z}$, $\dfrac{1}{\overline{z}}$ を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし, $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1)　点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。

(2)　直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき, r を θ の関数として表し, θ の動きうる区間 $(\alpha,\ \beta)$ を求めよ。

(3)　(2)において, 原点と点 $\cos\beta + i\sin\beta$ を通る直線を l とし, 点 P と l の距離を d とする。$\theta \to \beta$ のとき, d は 0 に収束することを示せ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

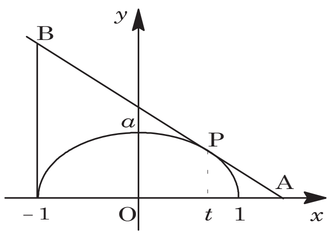
(1) すべての正の数 x, y に対して，不等式 $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1，…，x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ を満たしているとき，不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log \frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$y=a\sqrt{1-x^2}$ に対して，$y'=\dfrac{-2ax}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-ax}{\sqrt{1-x^2}}$



接点を$\mathrm{P}(t,\ a\sqrt{1-t^2})$とおくと，接線の方程式は，

$$y-a\sqrt{1-t^2}=\frac{-at}{\sqrt{1-t^2}}(x-t)$$

$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$を通るので，

$$-a\sqrt{1-t^2}=\frac{-at}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-t\right),\ -a(1-t^2)=-at\left(\frac{1}{\cos\theta}-t\right)$$

よって，$1-t^2=\dfrac{t}{\cos\theta}-t^2$ より，$t=\cos\theta$ となる。

このとき，$a\sqrt{1-t^2}=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a|\sin\theta|=a\sin\theta$ より，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$

接線は，$y-a\sin\theta=\dfrac{-a\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta)$，$y=\dfrac{-a\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{a}{\sin\theta}$ ………(＊)

(2)　$x=-1$ のとき，(＊)より $y=\dfrac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$ となり，$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

まず，$\displaystyle\int_{-1}^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)$

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{a\sin\theta+\frac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}(\cos\theta+1)-\int_{-1}^{\cos\theta}a\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a\sin\theta(\cos\theta+1)+\frac{a(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}\right\}-\frac{1}{2}a(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}a\left\{\sin\theta+\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}-\pi+\theta\right\}=\frac{1}{2}a\left\{\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta}-\pi+\theta\right\}$$

また，$\displaystyle\int_{\cos\theta}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\cdot1^2-\frac{1}{2}(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)=\frac{1}{2}(\theta-\cos\theta\sin\theta)$

$$S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)a\sin\theta-\int_{\cos\theta}^{1}a\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\cos\theta\sin\theta\right)-\frac{1}{2}a(\theta-\cos\theta\sin\theta)=\frac{1}{2}a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\theta\right)$$

(3)　点Pが線分ABの中点のとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)$より，

$$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0,\ (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$$

$\cos\theta>0$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となるので，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ である。

このとき，$S_1=\dfrac{1}{2}a\left(2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$S_2=\dfrac{1}{2}a\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$より，$S_1=2S_2$ となる。

［解 説］

y 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍して，円を楕円に変換して解いたほうが簡単でしたが。

2

問題のページへ

(1)　条件式 $A(x)=A(y)B$ に，右から B^{-1} をかけて，

$$A(y)=A(x)B^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{1+3x^2} & 3x\\ x & \sqrt{1+3x^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\sqrt{1+3x^2}-3x & -3\sqrt{1+3x^2}+6x\\ 2x-\sqrt{1+3x^2} & -3x+2\sqrt{1+3x^2}\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{1+3y^2}=2\sqrt{1+3x^2}-3x\cdots\cdots①,\quad y=2x-\sqrt{1+3x^2}\cdots\cdots②$$

①より, $x>1$ のとき，$1+3y^2=(2\sqrt{1+3x^2}-3x)^2=21x^2+4-12x\sqrt{1+3x^2}$

$$y^2=7x^2+1-2\sqrt{4x^2(1+3x^2)}=(2x-\sqrt{1+3x^2})^2$$

これより，②が成立する x, y で，①は成り立つ。

$x>1$ のとき，②より，$y=\dfrac{4x^2-(1+3x^2)}{2x+\sqrt{1+3x^2}}=\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{1+3x^2}}>0\cdots\cdots\cdots③$

$$x-y=x-(2x-\sqrt{1+3x^2})=\sqrt{1+3x^2}-x=\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+3x^2}+x}>0$$

以上より, $x>1$ のとき, $0<y<x$ を満たす実数 y が存在する。

(2)条件より，x，$\sqrt{1+3x^2}$ がともに自然数なので，①より $\sqrt{1+3y^2}$ も自然数となる。

さらに，②③より y も自然数となる。

ここで, $x>1$ のとき，$y=x_1$ とおくと，$A(x)=A(x_1)B$ $(x>x_1>0)$

同様に，$A(x_1)=A(x_2)B$，$A(x_2)=A(x_3)B$，…，$A(x_k)=A(x_{k+1})B$，…と定義していくと，

$$A(x)=A(x_1)B=A(x_2)B^2=\cdots=A(x_k)B^k=A(x_{k+1})B^{k+1}=\cdots$$

このとき，(1)より $x>x_1>x_2>\cdots>x_k>x_{k+1}>\cdots>0$ となり，しかも x_1，x_2，…，x_k，x_{k+1}，…はすべて自然数なので，ある n に対して，$x_{n-1}=1$ となる。

すなわち，$A(x)=A(x_{n-1})B^{n-1}=A(1)B^{n-1}=BB^{n-1}=B^n$ となる自然数 n が存在する。なお，$x=1$ のときは $A(x)=B$ なので $n=1$ である。

［解 説］

有名な難問がまた出題されました。類題を解いた経験がないと，本問をアタックするのは無理でしょう。なお，記憶にあるところでは，2000 年の岡山大に，見かけは異なるものの同じ内容の問題が出ています。

3

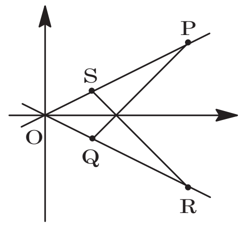
問題のページへ

(1)　$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ より，$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$

$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$，$\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r>1$ より $r>\dfrac{1}{r}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2}<-\theta<0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる

ので，点 P, Q, R, S は相異なる 4 点である。



(2)　PQ ⊥ RS より，$\arg\dfrac{z-\frac{1}{z}}{\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}} = \dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{z-\frac{1}{z}}{\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}} = ki\ (k>0)$

$z - \dfrac{1}{z} = ki\left(\bar{z} - \dfrac{1}{\bar{z}}\right)$

すると，$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta = ki\left\{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta - i\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\right\}$

$= ki\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta + k\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$

$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta = k\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$ ……①，$\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta = k\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$ ……②

①②より $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta = k^2\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$ となり，$r>\dfrac{1}{r}$，$\cos\theta>0$, $k>0$ より $k=1$

①より，$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta = \left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$，$r^2(\cos\theta - \sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta$

$\cos\theta - \sin\theta = 0$，すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときは成立しないので，

$r^2 = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$，$r = \sqrt{\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}}$

さて, $r>1$ より $\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}>1$，$(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta)>(\cos\theta - \sin\theta)^2$

$(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta - \cos\theta + \sin\theta)>0$，$2\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)>0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$ より，θ の動きうる区間は $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

(3)　$\beta = \dfrac{\pi}{4}$ より，$d = r\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta - \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta\right)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}(\cos\theta - \sin\theta)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

したがって，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} d = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = 0$

[解 説]

誘導に従えば，スムーズに計算が進みます。うまくまとまっている問題です。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　x, y の大小関係で場合分けをして，不等式 $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ を証明する。

(i)　$0 < y < x$ のとき

$f(x) = \log x$ とすると，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ となるので，平均値の定理より，

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} = \frac{1}{c_1} \quad (0 < y < c_1 < x)$$

$\dfrac{1}{c_1} > \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log x - \log y}{x - y} > \dfrac{1}{x}$，$x(\log x - \log y) > x - y$

(ii)　$0 < x < y$ のとき

(i)と同様にして，$\dfrac{\log y - \log x}{y - x} = \dfrac{1}{c_2}$　$(0 < x < c_2 < y)$

$\dfrac{1}{c_2} < \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log y - \log x}{y - x} < \dfrac{1}{x}$，$x(\log y - \log x) < y - x$

$$x(\log x - \log y) > x - y$$

(iii)　$0 < x = y$ のとき

$\log x - \log y = 0$，$x - y = 0$ より，$x(\log x - \log y) = x - y$

(i)(ii)(iii)より，$x(\log x - \log y) \geqq x - y$（等号は $x = y$ のとき成立）

(2)　$1 \leqq i \leqq n$ として，(1)から，$x_i\left(\log x_i - \log\dfrac{1}{n}\right) \geqq x_i - \dfrac{1}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\log x_i - \log\frac{1}{n}\right) \geqq \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\right) \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

条件より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \log\frac{1}{n} \geqq 1 - \frac{1}{n} \cdot n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log\frac{1}{n}$$

等号が成立するのは，$(*)$において $x_i = \dfrac{1}{n}$ のとき，すなわち $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限る。

［解 説］

(2)は(1)を利用します。等号成立条件を参照すれば，x を x_i，y を $\dfrac{1}{n}$ と置き換えるのは，そんなに難しいことではありません。