1

解答解説のページへ

定積分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2\,dx$を$I(a,\ b)$とおく。

(1)　$I(a,\ b)$をa, bの多項式で表せ。

(2)　$b=a+1$のとき，$I(a,\ b)$が最小となるようなaおよびそのときの$I(a,\ b)$の値を求めよ。

(3)　$I(a,\ b)=1$かつ$b=ma+n$となる$(a,\ b)$がちょうど 1 組のとき，実数$m,\ n$の満たす条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$が$a_1=-4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot 2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定められているとする。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$とおくときb_nとb_{n+1}の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$a_n>a_{n+1}$となるようなnの値をすべて求めよ。

(3)　a_nが最小となるようなnの値をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

x の 3 次関数 $f(x)=x^3-kx^2+4k$ について以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のときつねに $f(x) \geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフが k の値によらず通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ を求めよ。さらに $a<x<b$ のときつねに $y=f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $I(a,\ b)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(a^2x^2+2abx+b^2)\,dx=\int_{0}^{1}(a^2x^2+b^2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}a^2x^3+b^2x\right]_0^1=\frac{1}{3}a^2+b^2$

(2) $b=a+1$のとき, (1)より,

$I(a,\ b)=\frac{1}{3}a^2+(a+1)^2=\frac{4}{3}a^2+2a+1=\frac{4}{3}\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}$

よって，$a=-\frac{3}{4}$のとき, 最小値$\frac{1}{4}$をとる。

(3) $I(a,\ b)=1$より，$\frac{1}{3}a^2+b^2=1$ ………①

条件より，$b=ma+n$ ………②

②を①に代入して，$\frac{1}{3}a^2+(ma+n)^2=1$

$\left(m^2+\frac{1}{3}\right)a^2+2mna+n^2-1=0$ ………③

$(a,\ b)$がちょうど1組存在する条件は, ③が重解をもつことなので,

$D/4=m^2n^2-\left(m^2+\frac{1}{3}\right)(n^2-1)=0$，$m^2-\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{3}=0$

よって，$3m^2-n^2=-1$

［解 説］

基本的な計算問題です。

2

問題のページへ

(1)　条件式 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot 2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+4n-13,\quad b_{n+1}=b_n+4n-13$$

ただし，$b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{-4}{2}=-2$ である。

よって, $n\geqq 2$ で，$b_n=-2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k-13)=-2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-13(n-1)$

$$=2n^2-15n+11$$

$n=1$ をあてはめると，$b_1=-2$ となり成立する。

したがって，$a_n=b_n2^n=(2n^2-15n+11)2^n$

(2)　(1)より，$a_{n+1}=\{2(n+1)^2-15(n+1)+11\}2^{n+1}=2(2n^2-11n-2)2^n$

$$a_{n+1}-a_n=2(2n^2-11n-2)2^n-(2n^2-15n+11)2^n$$
$$=(2n^2-7n-15)2^n=(2n+3)(n-5)2^n$$

$a_n>a_{n+1}$ となるのは, $n>0$ より $n<5$, すなわち $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ のときである。

(3)　(2)より, $1\leqq n\leqq 4$ のとき $a_n>a_{n+1}$ であり，また $n=5$ のとき $a_n=a_{n+1}$, $n\geqq 6$ のとき $a_n<a_{n+1}$ となるので,

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5=a_6<a_7<a_8<\cdots\cdots$$

よって，$n=5,\ 6$ のとき，a_n は最小となる。

［解 説］

誘導つきの漸化式の解法と, 数列の最大値という有名問題で構成されています。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-kx^2+4k$ に対して，$f'(x)=3x^2-2kx=x(3x-2k)$

(i)　$k\leqq 0$ のとき

$x\geqq 0$ のとき $f'(x)\geqq 0$ より，$f(x)\geqq f(0)=4k$ である。

これより，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ である条件は $k\geqq 0$ となり，$k\leqq 0$ と合わせると $k=0$ となる。

(ii)　$k>0$ のとき

右表より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ となる条件は $f\left(\frac{2}{3}k\right)\geqq 0$ なので，

$$\frac{8}{27}k^3-\frac{4}{9}k^3+4k\geqq 0,\ -\frac{4}{27}k(k^2-27)\geqq 0$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$k>0$ より，$0<k\leqq 3\sqrt{3}$ となる。

(i)(ii)より，求める k の値の範囲は $0\leqq k\leqq 3\sqrt{3}$ である。

(2)　$y=f(x)$ すなわち $y=x^3-kx^2+4k$ を k についてまとめて，

$$(x^2-4)k+y-x^3=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$が k の値によらず成立する $(x,\ y)$ の条件は，

$$x^2-4=0,\ y-x^3=0$$

$x=2$ のとき $y=8$，$x=-2$ のとき $y=-8$ より，$\mathrm{A}(-2,\ -8)$，$\mathrm{B}(2,\ 8)$ となり，直線 AB の方程式は，$y-8=4(x-2)$，$y=4x$ である。

すると，$y=f(x)$ のグラフが直線 $y=4x$ の上にある条件は，

$$x^3-kx^2+4k>4x,\ x^3-kx^2-4x+4k>0,\ (x-2)(x+2)(x-k)>0$$

$-2<x<2$ から $(x-2)(x+2)<0$ となるので，$x-k<0$

そこで，$g(x)=x-k$ とおくと，$-2<x<2$ で $g(x)<0$ となる条件から，

$$g(2)=2-k\leqq 0,\ k\geqq 2$$

［解 説］

微分法を中心とした基本問題です。(3)の結論を，あわてて $k>2$ としないように注意してください。