1

解答解説のページへ

関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

2

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$が$a_1=36$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot 2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定められているとする。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$とおくときb_nとb_{n+1}の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$a_n>a_{n+1}$となるようなnの値の範囲およびa_nが最小となるようなnの値を求めよ。

(3)　$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$とおくときS_nが最小となるようなnの値をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 次の(i), (ii)のグラフの概形を別々にかけ。

(i) $y=1-|x|$

(ii) $y=\dfrac{1}{1+|x|}$

(2) 区間$-1\leqq x\leqq 1$において不等式$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$が成り立つとき，定数a, bの満たす条件を求めよ。

(3) a, bが(2)で求めた条件を満たすとき，区間$-1\leqq x\leqq 1$で$y=1-|x|$と$y=(ax+b)(1-x^2)$のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$，$f'(0)$および$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$の値を求めよ。

(2)　O を原点, P を曲線$y=f(x)$上の点, Q をx軸上の点とする。P, Q のx座標がともに正で，OP = OQ の関係を保ちながら P，Q が動くとき，直線 PQ がy軸と交わる点を R とする。

(i)　P のx座標をt, R のy座標を$g(t)$とおくとき，

$$g(t)=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

となることを示せ。

(ii)　P が O に限りなく近づくとき, R が近づく点を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ より，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$ なので，

$$f(\theta)=t+\sqrt{2}(t^2-1)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ から $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(\theta)=0$ から $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$，$(\sqrt{2}t-1)(t+\sqrt{2})=0$ より，$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\sqrt{2}$

(i)　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

すると，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{6}\pi$，$2\pi+\dfrac{1}{6}\pi$ より，$\theta=\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

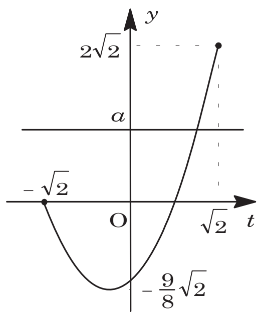
(ii)　$t=-\sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

すると，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ より，$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$

(i)(ii)より，$\theta=\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(3)　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)(0\leqq\theta<2\pi)$ より，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき θ は 1 個，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のときθは 2 個存在する。

さて，$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=a$ を満たす t の個数は，放物線 $y=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。



この放物線を $y=\sqrt{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$ と変形すると，$a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a\leqq2\sqrt{2}$ のとき t は 1 個，$-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}<a\leqq0$ のとき t は 2 個存在する。

よって，$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるのは，$a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a<2\sqrt{2}$ のときである。

[解 説]

三角方程式の解の個数についての頻出問題です。グラフを書いて，論理を注意深く進めていかないと，ミスをしてしまいます。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　条件式 $a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot 2^{n+1}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ より，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+4n-17,\ b_{n+1}=b_n+4n-17$$

ただし，$b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{36}{2}=18$ である。

よって, $n\geqq 2$ で，$b_n=18+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-17)=18+4\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n-17(n-1)$

$$=2n^2-19n+35$$

$n=1$ をあてはめると，$b_1=18$ となり成立する。

したがって，$a_n=b_n2^n=(2n^2-19n+35)2^n$

(2)　(1)より，$a_{n+1}=\{2(n+1)^2-19(n+1)+35\}2^{n+1}=2(2n^2-15n+18)2^n$

$$a_{n+1}-a_n=2(2n^2-15n+18)2^n-(2n^2-19n+35)2^n$$
$$=(2n^2-11n+1)2^n$$

$a_n>a_{n+1}$ となるのは，$2n^2-11n+1<0$，$n(2n-11)+1<0$

この不等式を満たす自然数は $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である。

すると, $1\leqq n\leqq 5$ のとき $a_n>a_{n+1}$ であり, $n\geqq 6$ のとき $a_n<a_{n+1}$ となるので,

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6<a_7<a_8<\cdots\cdots$$

よって，$n=6$ のとき，a_n は最小となる。

(3)　$n\geqq 2$ で $S_n-S_{n-1}=a_n$ より，$a_n>0$ のとき $S_{n-1}<S_n$，$a_n=0$ のとき $S_{n-1}=S_n$，$a_n<0$ のとき $S_{n-1}>S_n$ となる。

さて，$a_n>0$ とすると, (1)より $2n^2-19n+35>0$ となり,

$$(2n-5)(n-7)>0,\ n<\frac{5}{2},\ 7<n$$

よって，$n=2$ のとき $a_n>0$，$3\leqq n\leqq 6$ のとき $a_n<0$，$n=7$ のとき $a_n=0$，$n\geqq 8$ のとき $a_n>0$ となるので,

$$S_1<S_2>S_3>S_4>S_5>S_6=S_7<S_8<S_9<\cdots\cdots$$

$a_1=36$，$a_2=5\times 2^2=20$，$a_3=-4\times 2^3=-32$ より，$S_3=36+20-32=24$ となり，$S_3<S_1=36$ であるので，S_n が最小となるのは $n=6,\ 7$ のときである。

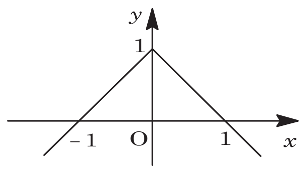
［解 説］

誘導つきの漸化式の解法と，数列の最大値という有名問題で構成されています。文系に類題が出題されています。

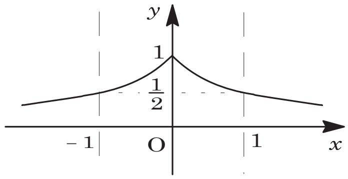
3

問題のページへ

(1)　$y=1-|x|$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=1-x$，$x<0$のとき$y=1+x$となるので，グラフは右図のようになる。



また，$y=\dfrac{1}{1+|x|}$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=\dfrac{1}{1+x}$，$x<0$のとき$y=\dfrac{1}{1-x}$となるので，グラフは右下図の実線のようになる。



(2)　$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$ ……①が，$-1\leqq x\leqq 1$において成立する条件は，

(i)　$x=\pm 1$のとき

①の両辺とも0となり，任意の$a,\ b$で成立する。

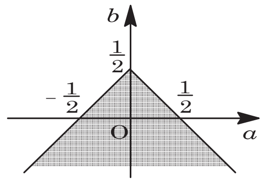
(ii)　$-1<x<1$のとき

$1-x^2>0$より，不等式①は，$ax+b\leqq\dfrac{1-|x|}{1-x^2}$ ………②

さて，$1-x^2=1-|x|^2=(1-|x|)(1+|x|)$と変形すると，不等式②は，

$$ax+b\leqq\frac{1}{1+|x|}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$f(x)=ax+b$とおくと，③は$-1<x<1$において，$y=f(x)$のグラフが$y=\dfrac{1}{1+|x|}$の下方にあることに等しいので，$a>0$のとき$f(1)=a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a=0$のとき$b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a<0$のとき$f(-1)=-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$となり，$ab$平面上に図示すると，右図の網点部となる。



(i)(ii)より，求める条件は，$a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$

(3)　求める図形の面積をSとすると，

$$S=\int_{-1}^{1}\{1-|x|-(ax+b)(1-x^2)\}dx=\int_{-1}^{1}\{1-|x|+ax^3+bx^2-ax-b\}dx$$

$$=2\int_0^1(1-|x|+bx^2-b)\,dx=2\int_0^1(bx^2-x+1-b)\,dx$$

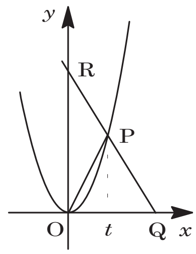
$$=2\left(\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}+1-b\right)=-\frac{4}{3}b+1$$

［解 説］

$x^2=|x|^2$に気付くことがポイントです。(1)で$y=\dfrac{1}{1+|x|}$のグラフを書かせる設問が，このヒントとなっています。

4

問題のページへ



(1)　$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$ より，$f(0)=e^0+e^0-2=0$

また，$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$ より，$f'(0)=2e^0-2e^0=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)^2=(1+1)^2=4$$

(2)　$P(t,\ f(t))$ とおくと，$OP=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}$

$OP=OQ$ より $Q\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2},\ 0\right)$ となり，条件から $R(0,\ g(t))$ とおくと，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{PQ}$ より，

$$(0,\ g(t))=(t,\ f(t))+k\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t,\ -f(t)\right)$$

$$0=t+k\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t\right)\cdots\cdots\cdots①,\ g(t)=f(t)-kf(t)\cdots\cdots\cdots②$$

①より $k=\dfrac{-t}{\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t}=-\dfrac{t\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}+t\right)}{\{f(t)\}^2}$ となり，②に代入して，

$$g(t)=f(t)+\frac{t\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}+t\right)}{f(t)}=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

さて，$g(t)=\dfrac{t^2}{f(t)}+f(t)+\sqrt{\left\{\dfrac{t^2}{f(t)}\right\}^2+t^2}$ と変形すると，(1)より $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{f(t)}=\frac{1}{4}$，$f(0)=0$ なので，

$$\lim_{t\to 0}g(t)=\frac{1}{4}+0+\sqrt{\frac{1}{16}+0}=\frac{1}{2}$$

よって, P が O に近づくとき, R は点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$に近づく。

［解 説］

一見，難しそうにみえる問題ですが，内容は基本的な計算の積み重ねです。なお，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ は重要な極限値の 1 つです。