1

解答解説のページへ

座標平面上で動点 P が, x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し, y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し, 停留することを文字 c で表す。a, b, c からなる文字列が与えられたとき, 点 P は原点を出発し, その文字列に従って移動する。たとえば, 長さ 4 の文字列 acab に対しては, 点 P は原点$(0,\ 0)$から出発して, $(1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$と移動し, 点$(2,\ 1)$が到達点となる。

(1)　n を自然数とする。長さ n の文字列のなかで, 点 P の到達点の x 座標と y 座標の和が n となる文字列は何個あるか。また, その理由を説明せよ。

(2)　k, n を自然数とし, $1\leqq k\leqq n$ とする。長さ n の文字列のなかで, 点 P の到達点の x 座標と y 座標の和が k となる文字列の個数を $F_n(k)$ とする。$F_n(k)$ を k と n を用いて表せ。

(3)　自然数 n が与えられたとき, $F_n(k)$ が最大になる自然数 k の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の曲線$C: y=|x^2-1|$と傾き a の直線$l: y=a(x+1)$が異なる 3 点で交わっているとする。

(1) aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) Cとlで囲まれた2つの図形の面積の和Sをaを用いて表せ。

(3) Sが最小になるaの値を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

複素数zに対し，$w=iz^2$とおく。ただし，iは虚数単位である。

(1)　$z=a(\cos\theta+i\sin\theta)$（$a$ は正の実数）において，θが$0°\leqq\theta\leqq 90°$の範囲を動くとき, wが描く図形を複素数平面上に図示せよ。

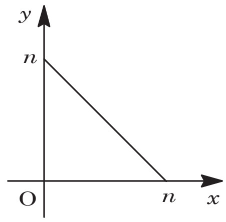
(2)　$z=x+iy$（x, y は実数）が直線$x=1$上を動くとき，w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3)　$z=x+iy$（x, yは実数）において，x, yが$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$，$x^2+y^2\geqq 1$を満たしながら動くとき, wが動く範囲を複素数平面上に図示せよ。

1

問題のページへ

(1)　動点 P が原点から n 回進み，直線 $x+y=n$ 上に到達するのは，i を $0\leqq i\leqq n$ として，右に i 回，上に $n-i$ 回だけ移動する場合である。すなわち, a が i 個, b が $n-i$ 個, c が 0 個の文字列が対応し，その総数は,



$$\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i=(1+1)^n=2^n$$

(2)　(1)と同様にして，直線 $x+y=k$ $(1\leqq k\leqq n)$ 上に到達するのは，j を $0\leqq j\leqq k$ として，右に j 回，上に $k-j$ 回だけ移動し，停留が $n-k$ 回の場合である。すなわち, a が j 個, b が $k-j$ 個, c が $n-k$ 個の文字列が対応し，その総数 $F_n(k)$ は,

$$F_n(k)=\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{j!(k-j)!(n-k)!}=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\sum_{j=0}^{k}{}_n\mathrm{C}_k\,{}_k\mathrm{C}_j$$

$$={}_n\mathrm{C}_k\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j={}_n\mathrm{C}_k(1+1)^k={}_n\mathrm{C}_k\cdot 2^k$$

(3)　まず，$\dfrac{F_n(k+1)}{F_n(k)}=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}\cdot 2^{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k\cdot 2^k}=\dfrac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot 2^{k+1}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot 2^k}=\dfrac{2(n-k)}{k+1}$ となる。

そこで，$\dfrac{F_n(k+1)}{F_n(k)}>1$ とすると，$2(n-k)>k+1$ より $k<\dfrac{2n-1}{3}$ となるので,

$$F_n(k+1)>F_n(k)\iff k<\frac{2n-1}{3}$$

すると，$F_n(k+1)=F_n(k)\iff k=\dfrac{2n-1}{3}$，$F_n(k+1)<F_n(k)\iff k>\dfrac{2n-1}{3}$

さて，l を自然数として，n を $n=3l$，$n=3l-1$，$n=3l-2$ の 3 つの場合に分け，$F_n(k)$ が最大になるときを考える。

(i)　$n=3l$ のとき

$\dfrac{2n-1}{3}=\dfrac{6l-1}{3}=2l-\dfrac{1}{3}$ より，$k\leqq 2l-1$ のとき $F_n(k+1)>F_n(k)$，$k\geqq 2l$ のとき $F_n(k+1)<F_n(k)$ となる。

よって，$F_n(k)$ は $k=2l=2\cdot\dfrac{n}{3}=\dfrac{2}{3}n$ のときに最大になる。

(ii)　$n=3l-1$ のとき

$\dfrac{2n-1}{3}=\dfrac{6l-3}{3}=2l-1$ より，$k\leqq 2l-2$ のとき $F_n(k+1)>F_n(k)$，$k=2l-1$ のとき $F_n(k+1)=F_n(k)$，$k\geqq 2l$ のとき $F_n(k+1)<F_n(k)$ となる。

よって，$F_n(k)$ は $k=2l-1=2\cdot\dfrac{n+1}{3}-1=\dfrac{2}{3}n-\dfrac{1}{3}$ または $k=2l=\dfrac{2}{3}n+\dfrac{2}{3}$ のときに最大になる。

© 電送数学舎 2004

(iii)　$n=3l-2$ のとき

$\dfrac{2n-1}{3}=\dfrac{6l-4}{3}=2l-\dfrac{4}{3}$ より，$k\leqq 2l-2$ のとき $F_n(k+1)>F_n(k)$，$k\geqq 2l-1$ のとき $F_n(k+1)<F_n(k)$ となる。

よって，$F_n(k)$ は $k=2l-1=2\cdot\dfrac{n+2}{3}-1=\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{3}$ のときに最大になる。

［解 説］

場合の数の最大を求める頻出問題です。ただ，n を場合分けしなくてはいけない点が，やや繁雑です。

© 電送数学舎 2004

2

問題のページへ

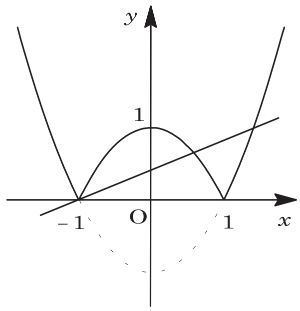
(1)　曲線$C: y=|x^2-1|$に対して,

$$y=x^2-1\ (|x|\geqq 1)\cdots\cdots\cdots①,\quad y=-x^2+1\ (|x|\leqq 1)\cdots\cdots\cdots②$$

また，$l: y=a(x+1)\cdots\cdots③$は，点$(-1,\ 0)$を通り，傾きaの直線である。

ここで，②に対して$y'=-2x$より，$x=-1$のとき$y'=2$である。

すると，Cとlが異なる3点で交わる条件は，右図より，$0<a<2$である。



(2)　①と③の交点は，$x^2-1=a(x+1)$より，

$$(x+1)(x-1-a)=0,\ x=-1,\ 1+a$$

また，②と③の交点は，$-x^2+1=a(x+1)$より，

$$(x+1)(x-1+a)=0,\ x=-1,\ 1-a$$

さて，Cとlで囲まれた2つの図形のうち，$-1\leqq x\leqq 1-a$の部分の面積をS_1，$1-a\leqq x\leqq 1+a$の部分の面積をS_2とする。

$$S_1=\int_{-1}^{1-a}\{-x^2+1-a(x+1)\}dx=\int_{-1}^{1-a}-(x+1)(x-1+a)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-a+1)^3=\frac{1}{6}(2-a)^3$$

$$S_2=S_1+\int_{-1}^{1+a}\{a(x+1)-(x^2-1)\}dx-2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx$$

$$=S_1+\int_{-1}^{1+a}-(x+1)(x-1-a)\,dx-2\int_{-1}^{1}-(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+a+1)^3+2\left(-\frac{1}{6}\right)(1+1)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3+\frac{1}{6}(2+a)^3-\frac{8}{3}$$

よって，$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(2-a)^3\times 2+\frac{1}{6}(2+a)^3-\frac{8}{3}=-\frac{1}{6}a^3+3a^2-2a+\frac{4}{3}$

(3)　(2)より，$S'=-\frac{1}{2}a^2+6a-2=-\frac{1}{2}(a^2-12a+4)$

$S'=0$の解は，$a=6\pm 4\sqrt{2}$となる。

右の増減表より，Sが最小になるのは，$a=6-4\sqrt{2}$のときである。

a	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
S'		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

［解 説］

超有名頻出問題の超有名解法で解いています。たとえば，1999年に名大・文系で，数値が異なるだけの同じ問題が出ています。

© 電送数学舎 2004

3

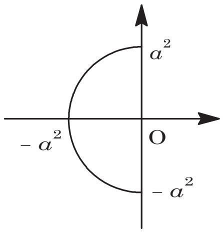
問題のページへ

(1)　$w = iz^2 = ia^2(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = a^2(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

$= a^2\{\cos(90^\circ + 2\theta) + i\sin(90^\circ + 2\theta)\}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より，$90^\circ \leqq 90^\circ + 2\theta \leqq 270^\circ$ となる。

よって，w は右図のような原点を中心とする半径 a^2 の半円を描く。



(2)　t を任意の実数として，$z = 1 + ti$ とおくと，

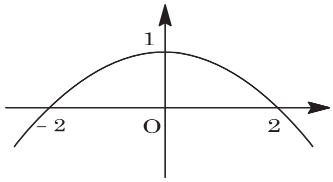
$$w = iz^2 = i(1+ti)^2 = i(1 + 2ti - t^2) = -2t + (1 - t^2)i$$

$w = x + yi$ とすると，

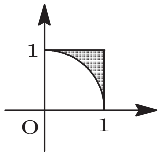
$$x = -2t \cdots\cdots\cdots ①,\quad y = 1 - t^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より $t = -\dfrac{x}{2}$ となり，②に代入して $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$

よって, w は右図のような放物線を描く。



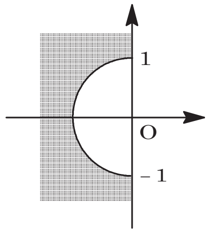
(3)　$z = x + yi$ に対して，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$，$x^2 + y^2 \geqq 1$ より，z の存在範囲は右図の網点部のようになる。



まず, (1)のように $z = a(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと，四分円の外部または周上の領域は，$a \geqq 1$，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ と表せる。

このとき，$a^2 \geqq 1$ より, w の動く範囲は, (1)より，原点を中心とする半径 1 の半円（実部が 0 以下）の外部となる。

これを図示すると，右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



次に，$0 \leqq x \leqq 1$ の領域にある z を z_1 とし, (2)と同様にして, $z_1 = k + ti$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ とおくと，

$$w = iz_1{}^2 = i(k+ti)^2 = i(k^2 + 2kti - t^2) = -2kt + (k^2 - t^2)i$$

$w = x + yi$ とすると，

$$x = -2kt \cdots\cdots\cdots ③,\quad y = k^2 - t^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

(i)　$k = 0$ のとき

③より $x = 0$，④より $y = -t^2 \leqq 0$ となり, w は虚軸上の実軸の下側部分を動く。

(ii)　$k \neq 0$ のとき

③より $t = -\dfrac{x}{2k}$ となり，④に代入して $y = k^2 - \dfrac{x^2}{4k^2}$ ……⑤となるので,

$$4k^2 y = 4k^4 - x^2,\quad 4k^4 - 4yk^2 - x^2 = 0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤の通過領域は，⑥が $0 < k \leqq 1$ に少なくとも 1 つの解をもつ条件として求められる。これは $k^2 = l$ とおいたとき，$4l^2 - 4yl - x^2 = 0$ ……⑦が，$0 < l \leqq 1$ に少なくとも 1 つの解をもつ条件と同値になる。

© 電送数学舎 2004

そこで，$f(l)=4l^2-4yl-x^2$ とおき，$f(0)=-x^2 \leqq 0$ に注目して，

(ii-i)　$f(0)<0\ (x \neq 0)$ のとき

$f(1)=4-4y-x^2 \geqq 0$ より，$y \leqq 1-\dfrac{x^2}{4}$

(ii-ii)　$f(0)=0\ (x=0)$ のとき

⑦は $4l^2-4yl=0$ となり，$l=0$，y より，$0<y \leqq 1$ である。

(i)(ii)をまとめると, w の動く範囲は，$y \leqq 1-\dfrac{x^2}{4}$ ………⑧

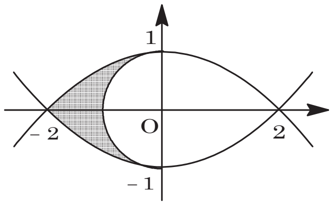
さらに，$0 \leqq y \leqq 1$ の領域は，$0 \leqq x \leqq 1$ の領域を原点まわりに 90° 回転したものなので，この領域にある z を z_2 とすると，$z_2=iz_1$ と表せる。

$$w=iz_2{}^2=i(iz_1)^2=i^3z_1{}^2=-(iz_1{}^2)$$

よって，このときの w の動く範囲は，⑧の領域を原点対称した領域となり，

$y \geqq -1+\dfrac{x^2}{4}$ ………⑨

以上より，半円の外部と⑧と⑨の共通部分をとり，w が動く範囲は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。



[解 説]

(3)が曲線や直線の移動だけであれば，(1)と(2)の結果がストレートに利用できます。しかし，領域の移動となっているので，工夫が必要です。文系問題としては，難しい部類に入ります。

© 電送数学舎 2004